



Universidade Federal do Pará
Faculdade de Engenharia Civil
Núcleo de Modelagem Estrutural Aplicada



Estruturas de Concreto I

Cisalhamento

Maurício de Pina Ferreira

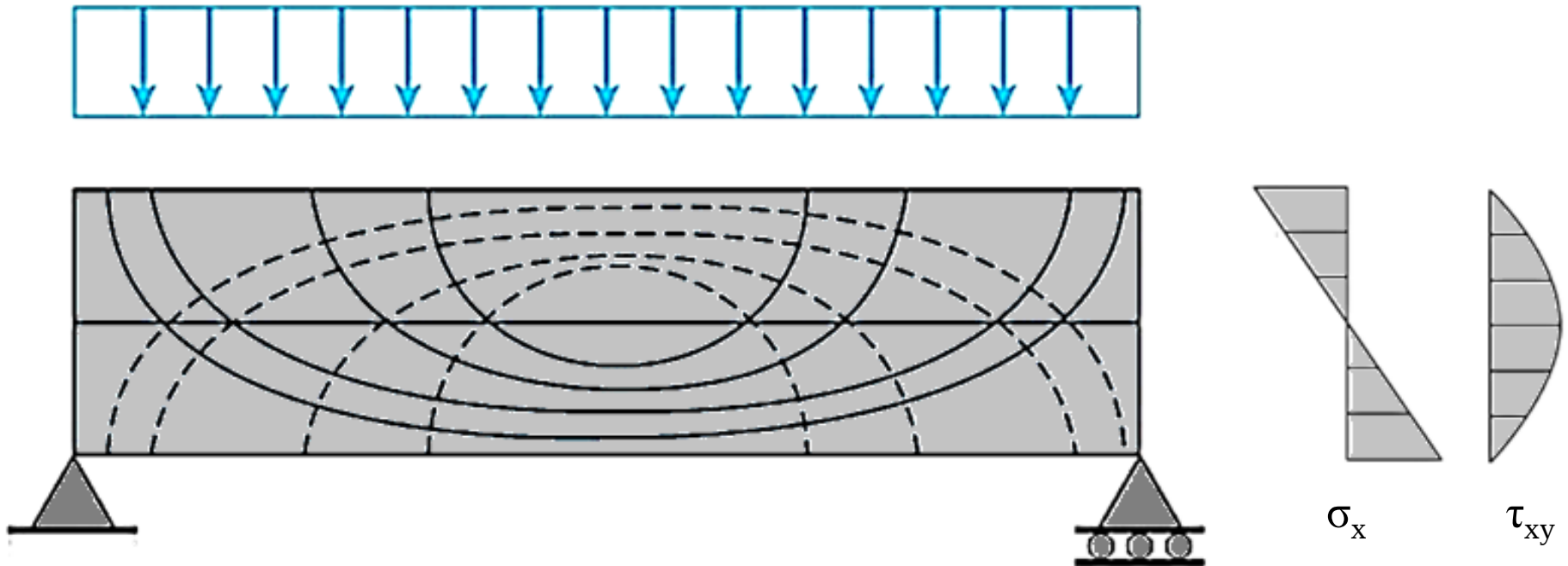
Doutor em Estruturas e Construção Civil
Pesquisador Produtividade CNPq

<http://lattes.cnpq.br/4242041552985485>

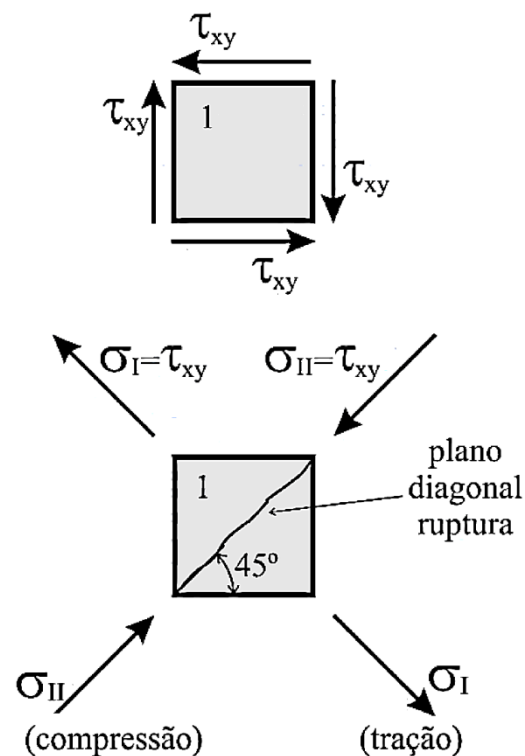
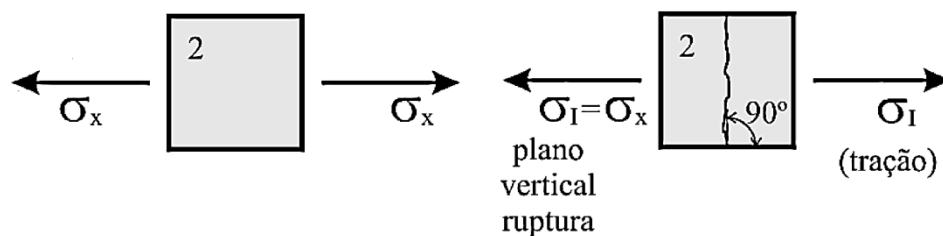
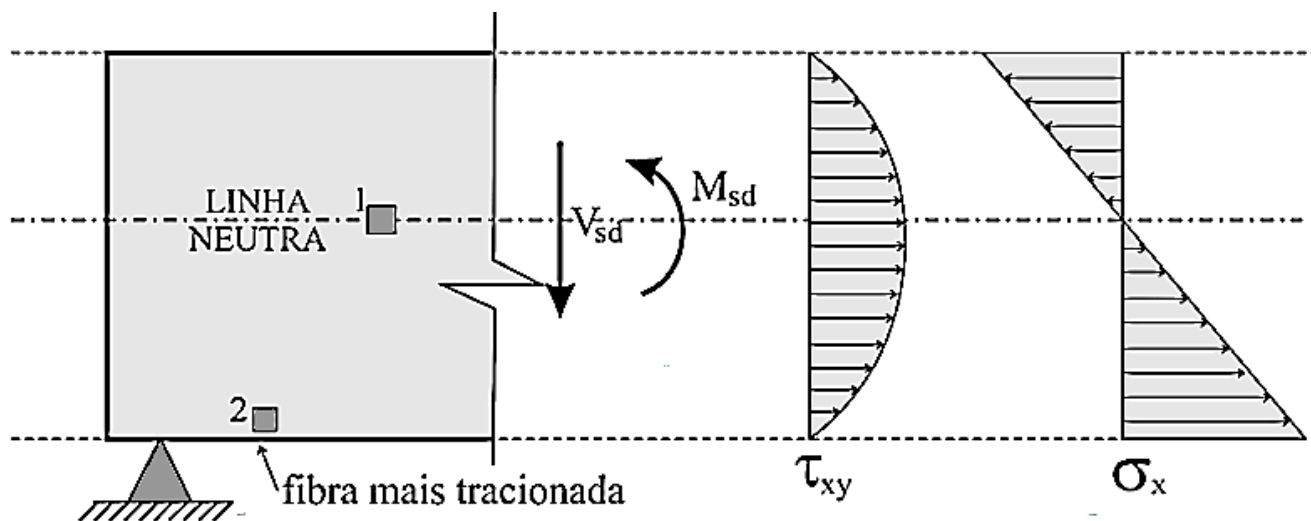


Introdução ao Cisalhamento

- Uma viga sob carga transversal desenvolve tensões normais e tangenciais, provocadas pela flexão e pelo esforço cortante.

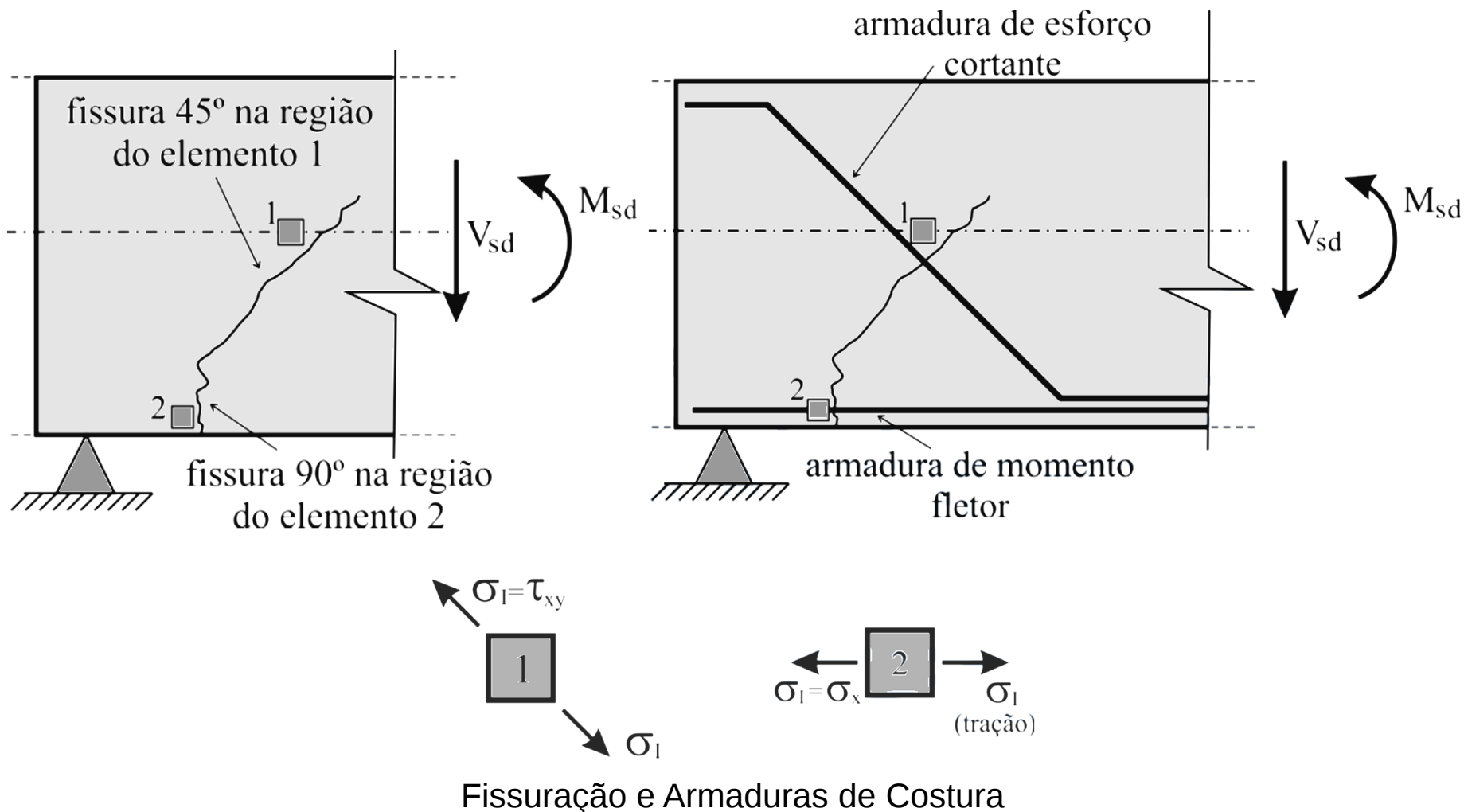


Introdução ao Cisalhamento

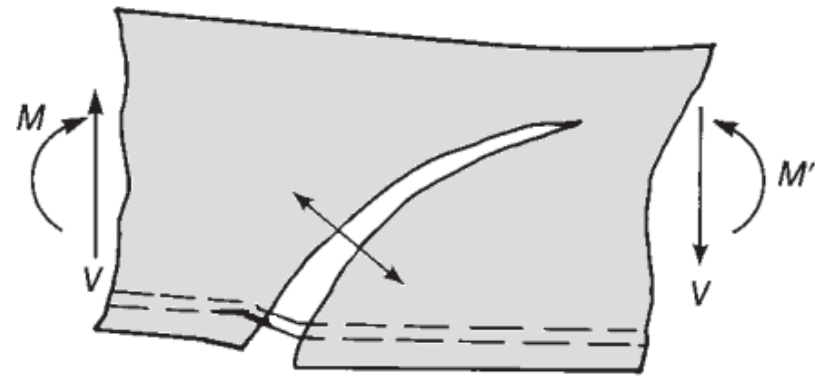
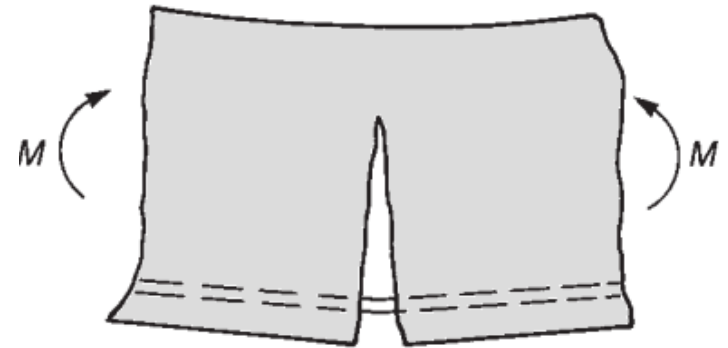
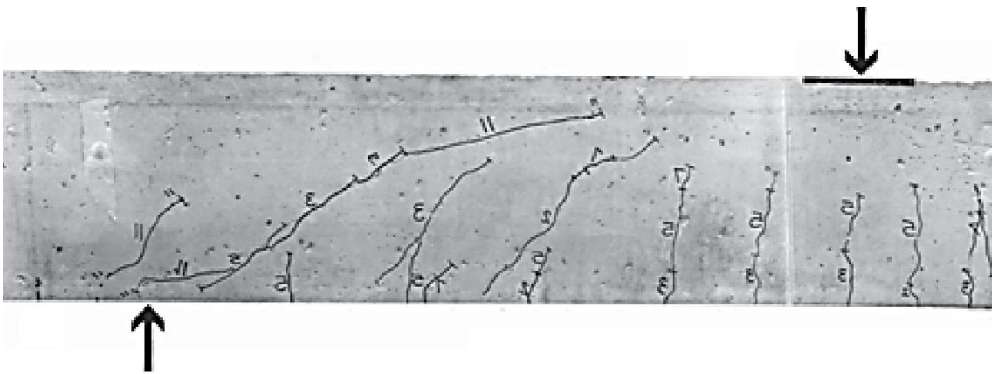
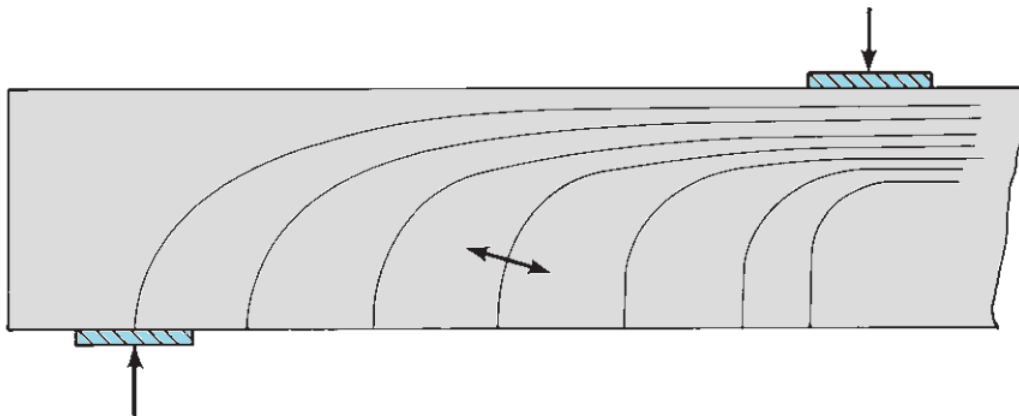


Tensões Principais em uma Viga

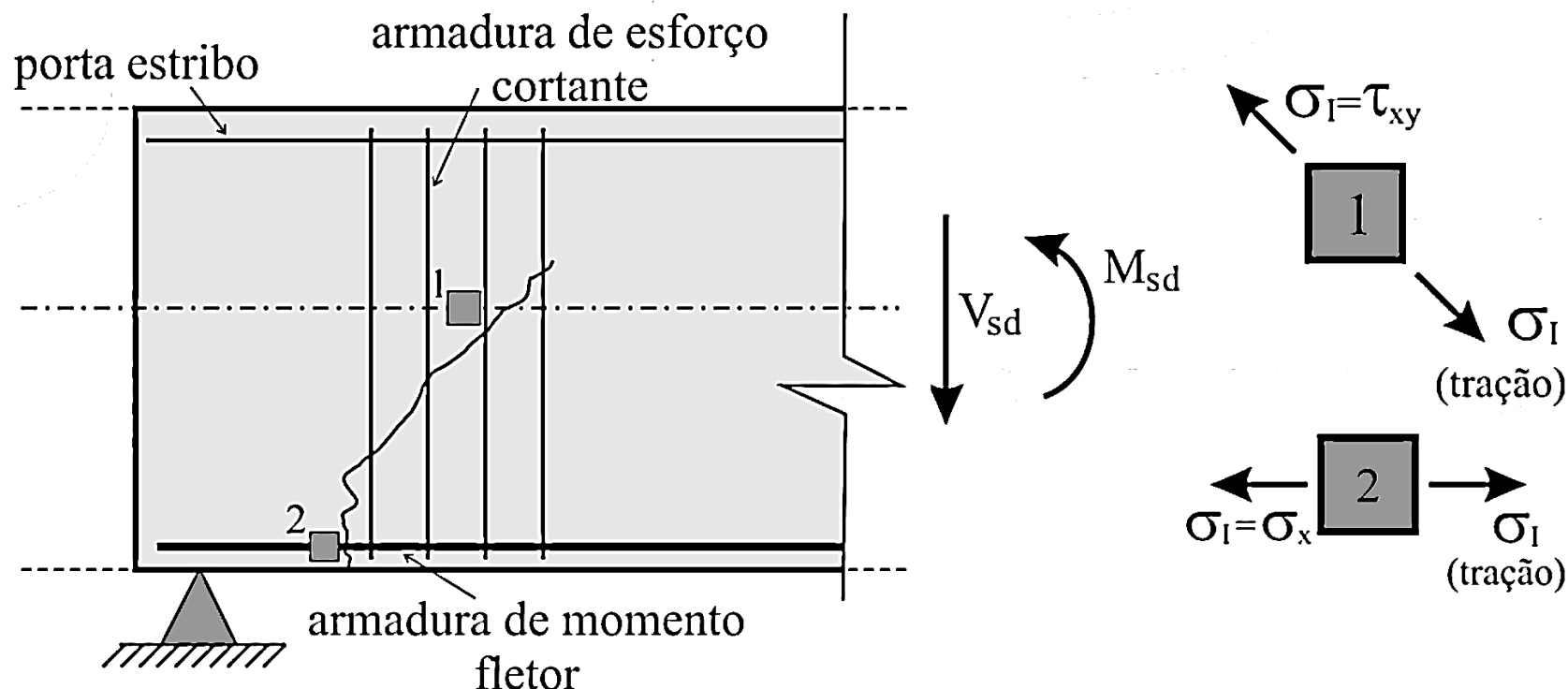
Introdução ao Cisalhamento



Introdução ao Cisalhamento

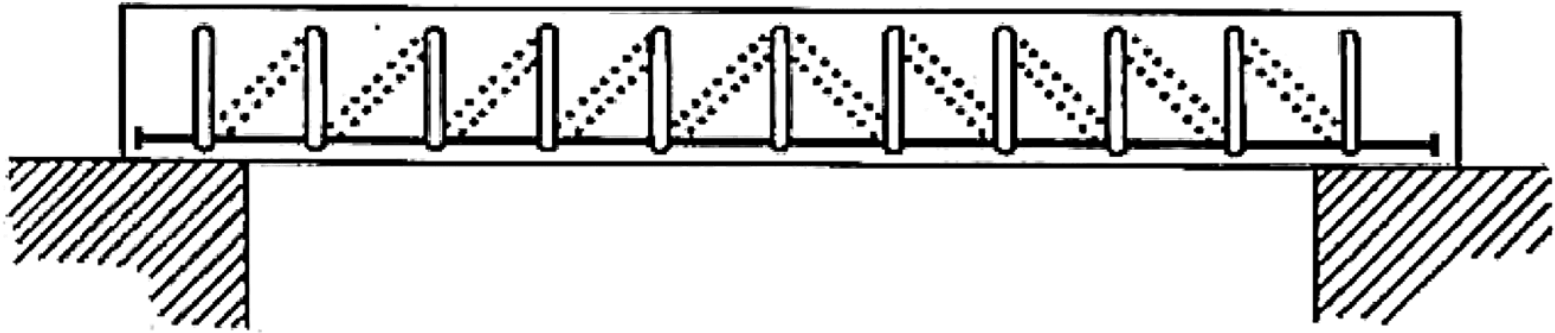


Introdução ao Cisalhamento

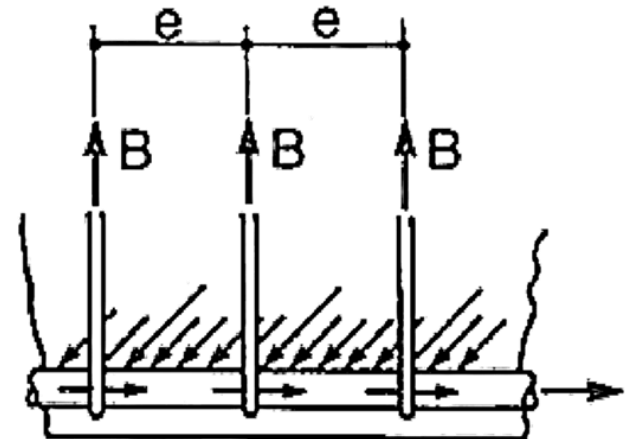
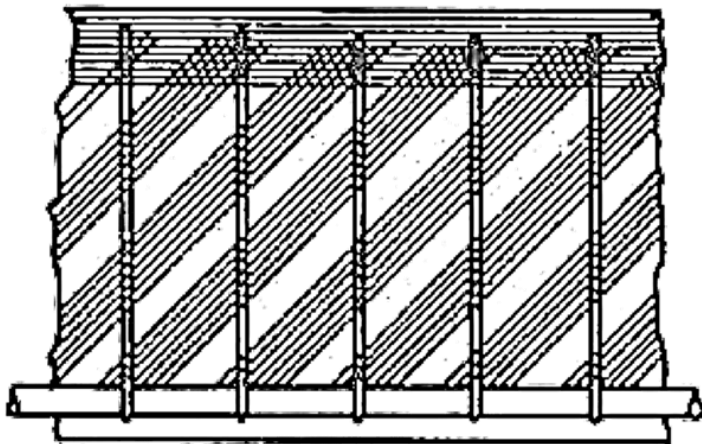


Arranjo Usual de Armaduras em Vigas

Analogia de Treliça

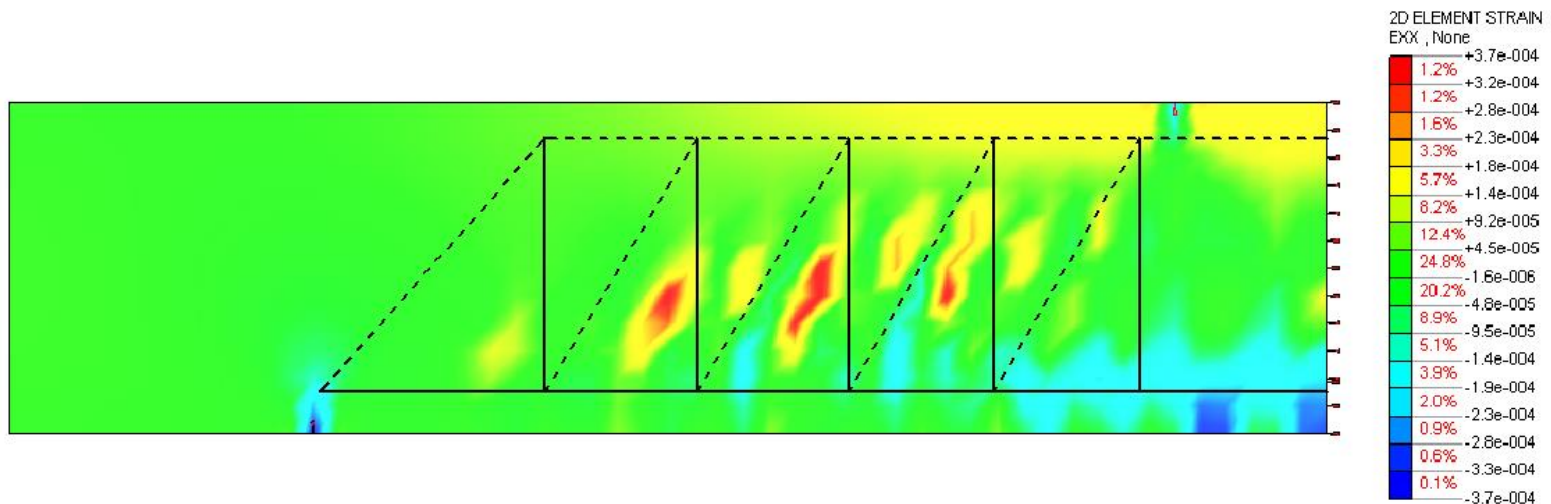
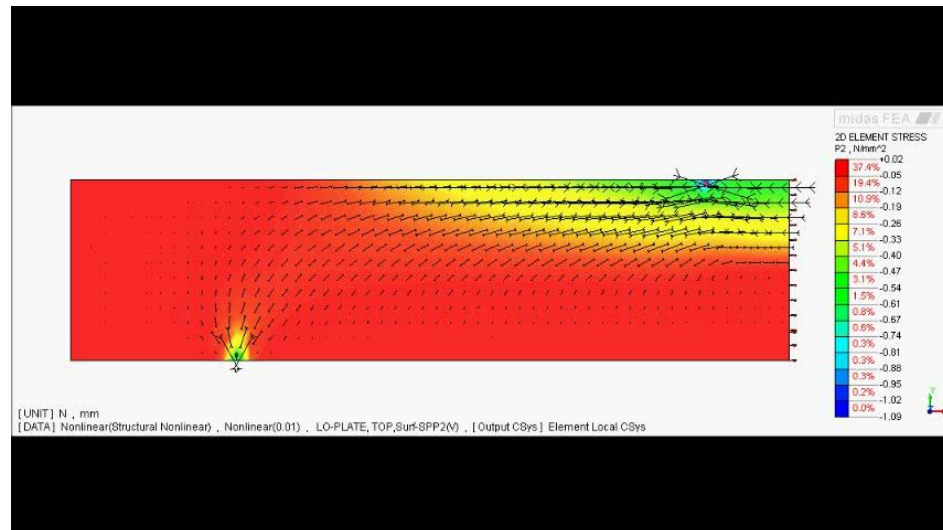
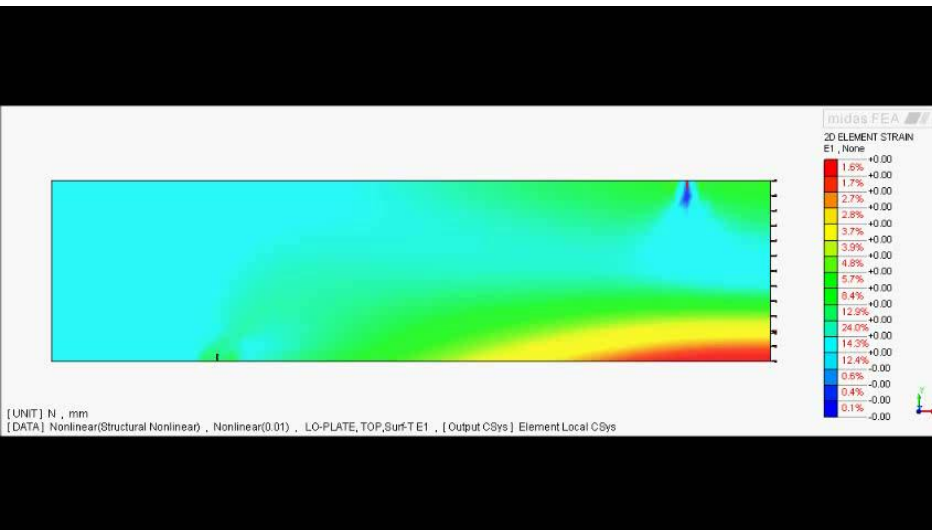


Analogia de Treliça (RITTER, 1899)



Modelo de Treliça e Forças nos Estribos (MORSCH, 1902)

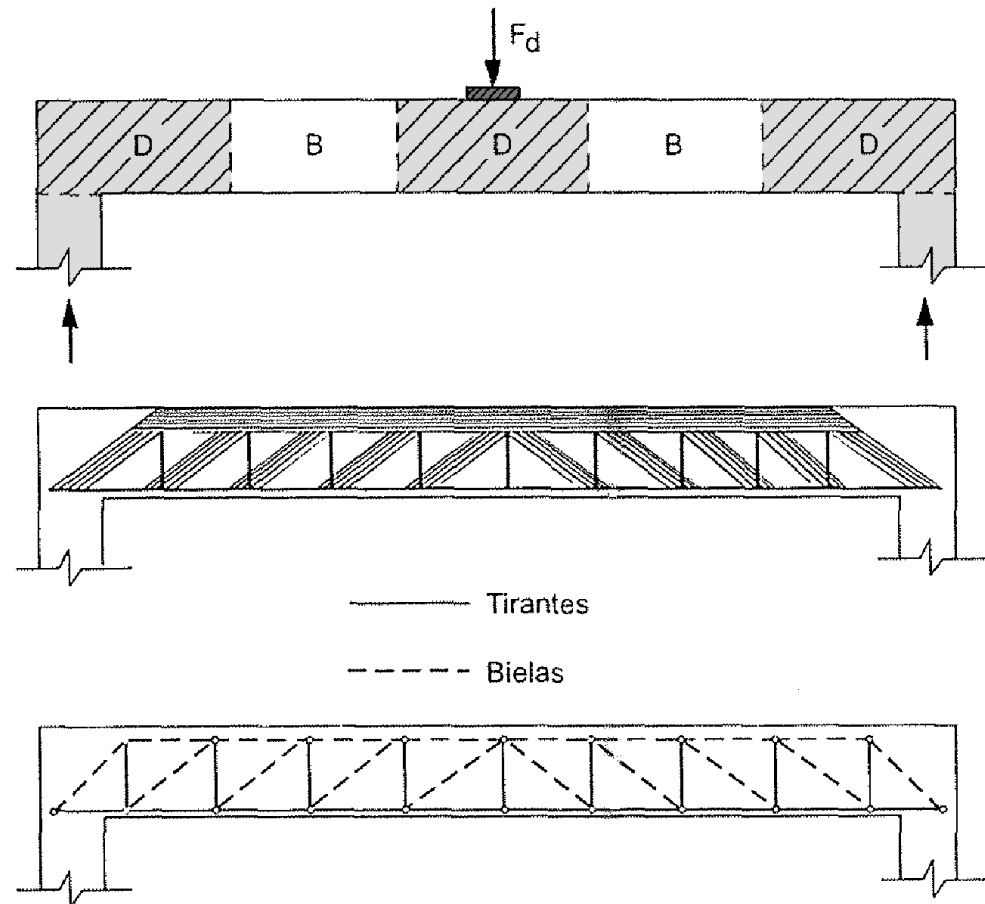
Analogia de Treliça



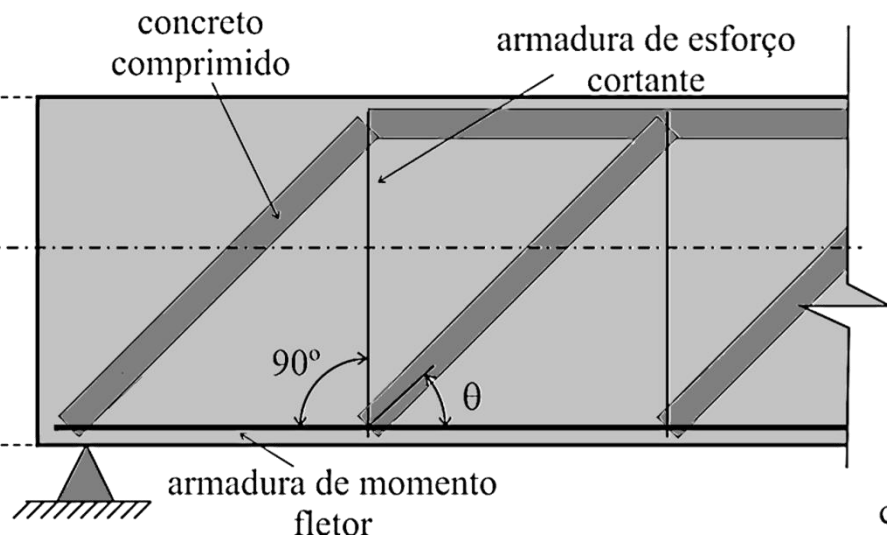
Treliça de Mörsch

Hipóteses fundamentais assumidas:

- Banzo superior e Banzo inferior paralelos;
- Montantes formados por estribos com $45^\circ < \alpha < 90^\circ$;
- Bielas são delimitadas pelas fissuras ($\theta = 45^\circ$).

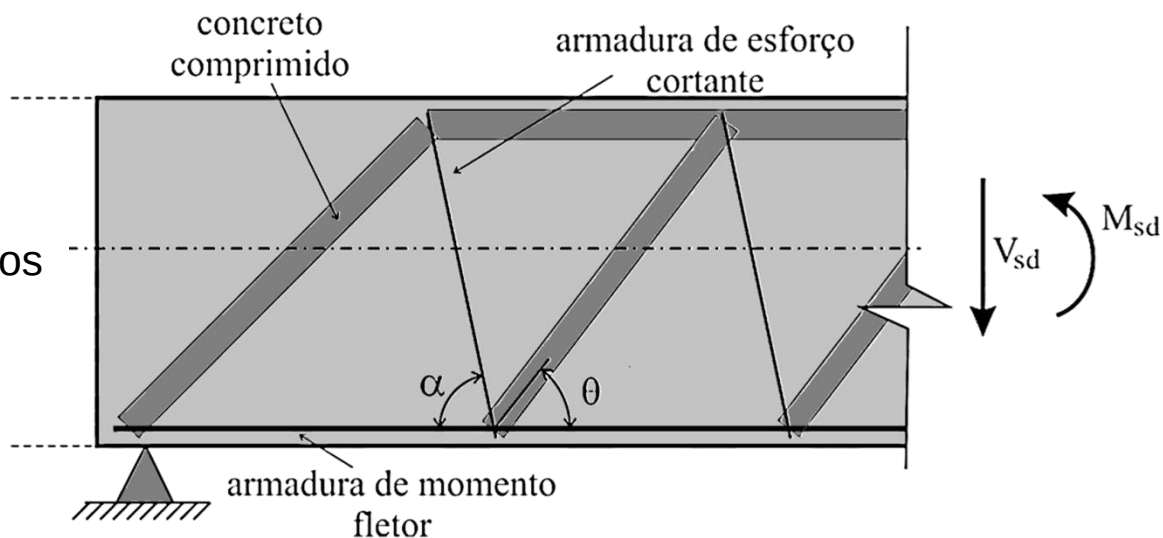


Treliça de Mörsch



V_{sd} M_{sd} Analogia de Treliça: Estribos Verticais

Analogia de Treliça: Estribos Inclinados

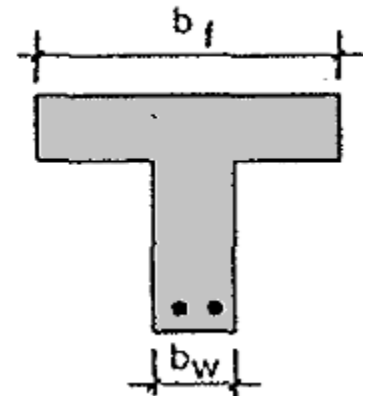
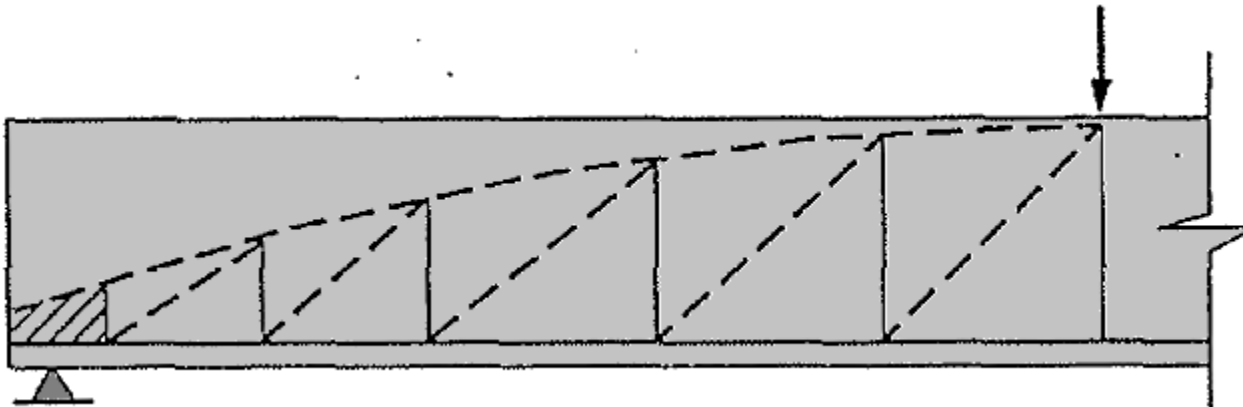


Treliça Generalizada de Mörsch

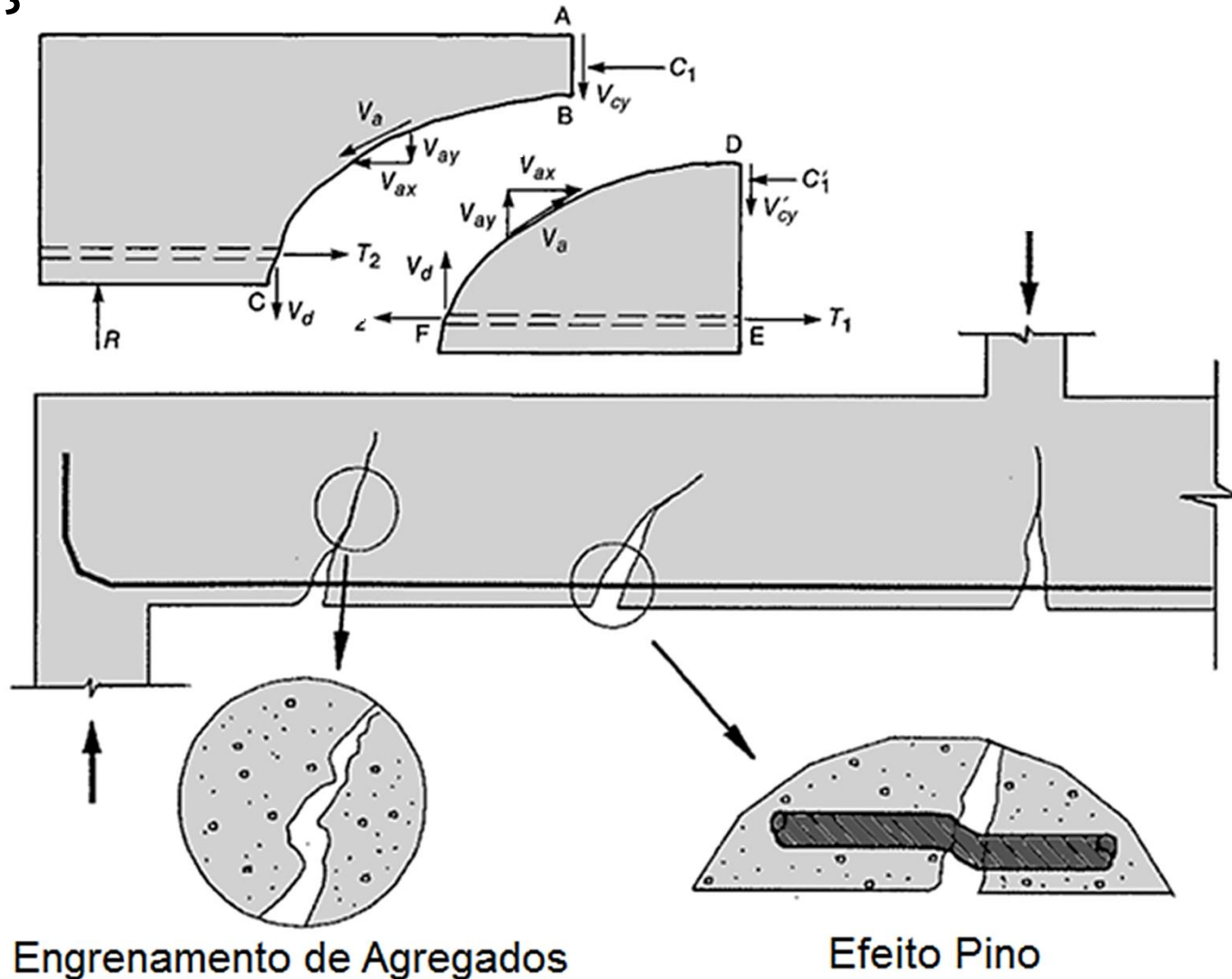
- Ensaios de Leonhardt e Mönning (1977) mostraram que o uso da analogia clássica de Mörsch conduz a uma quantidade exagerada de armadura de cisalhamento;
- Na prática, as deformações medidas experimentalmente nas armaduras mostraram-se menores que as estimadas;
- Nas regiões mais solicitadas pela força cortante, a inclinação das fissuras, e, portanto, das diagonais de concreto, é menor que os 45° admitidos por Mörsch.

Treliça Generalizada de Mörsch

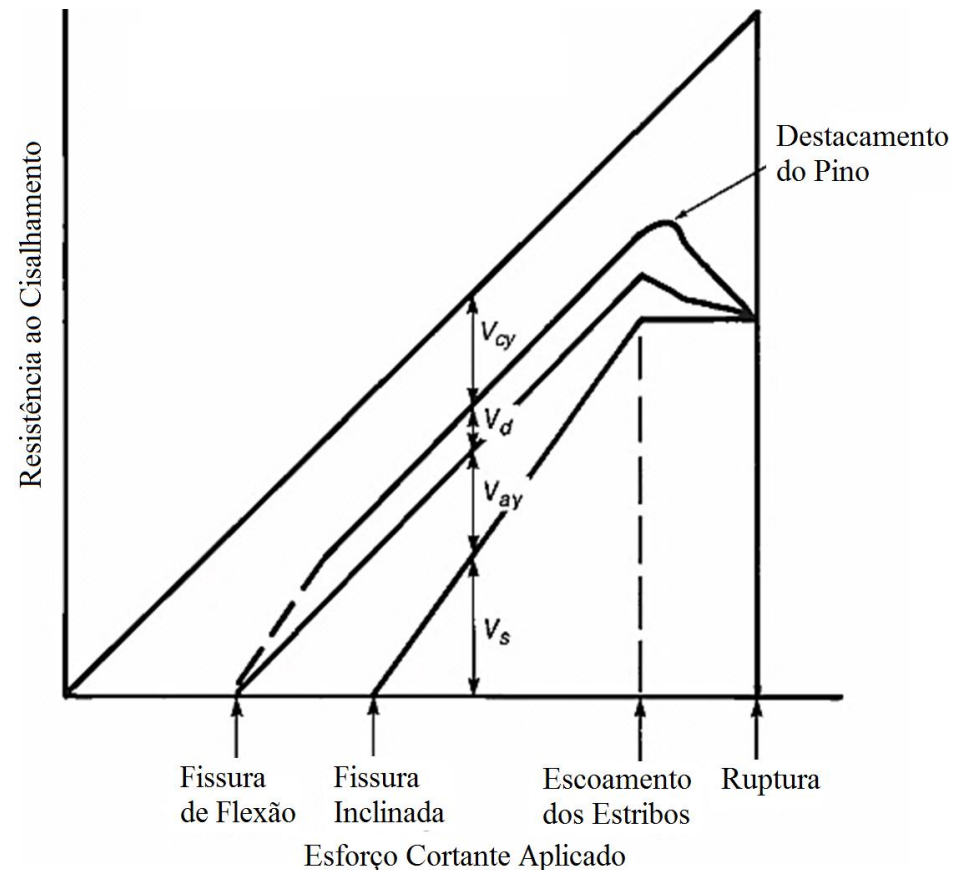
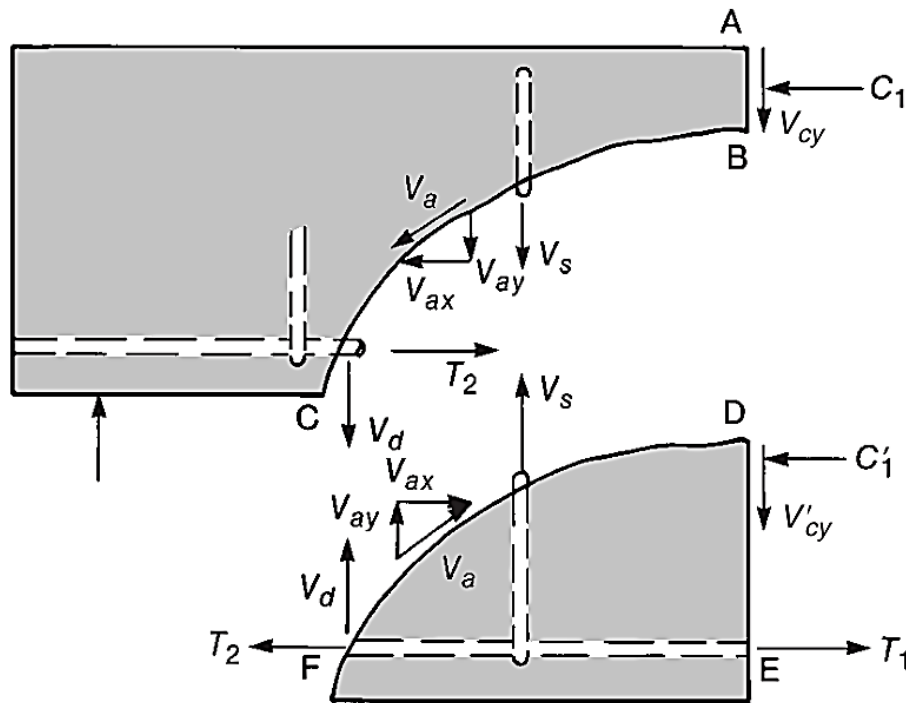
- Parte do esforço cortante é absorvido na zona de concreto comprimido, pois na prática o banzo comprimido é inclinado;
- O cisalhamento não é resistido unicamente pelas armaduras. Existem outros mecanismos, que foram ignorados por Mörsch.



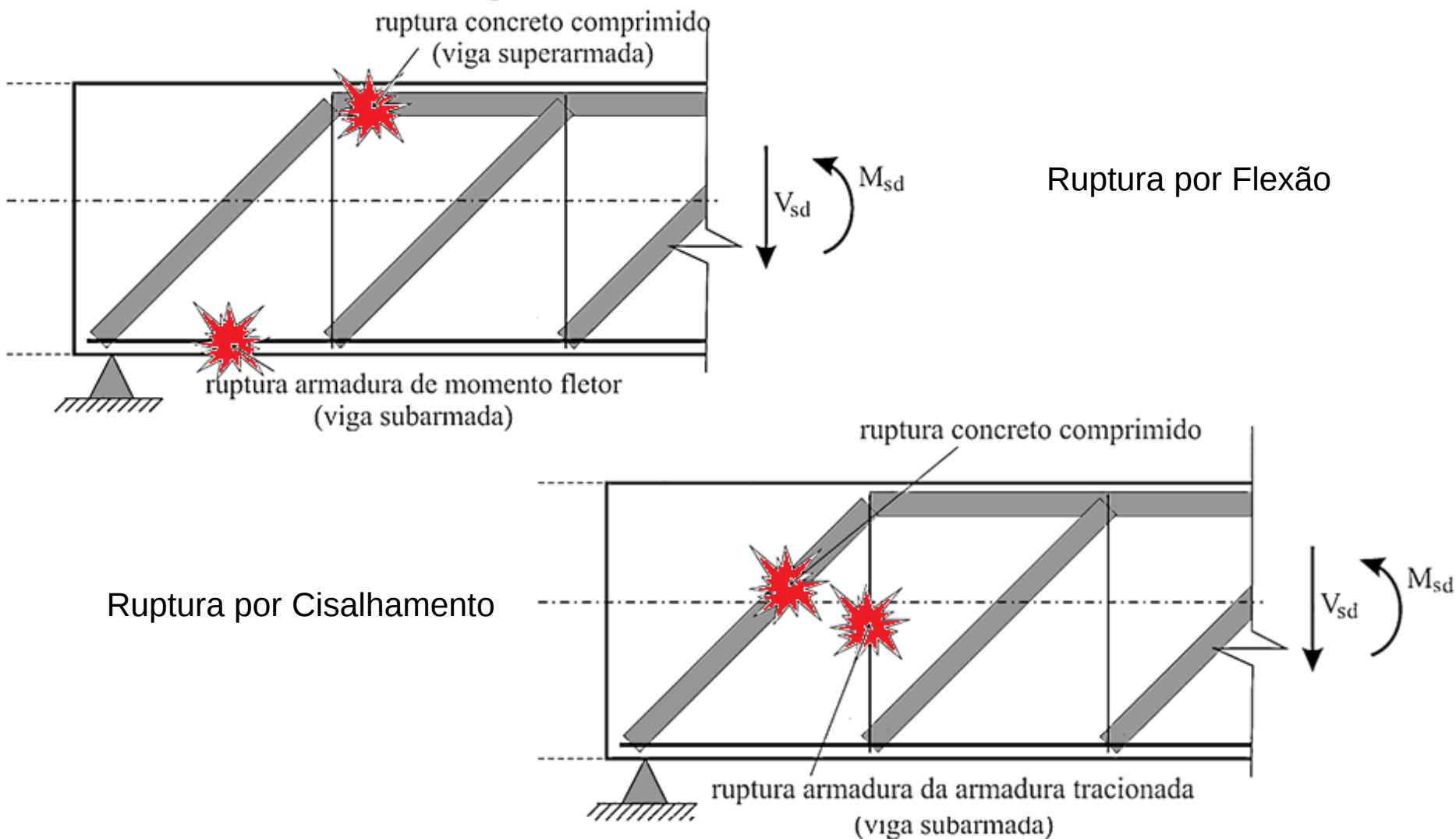
Treliça Generalizada de Mörsch



Treliça Generalizada de Mörsch



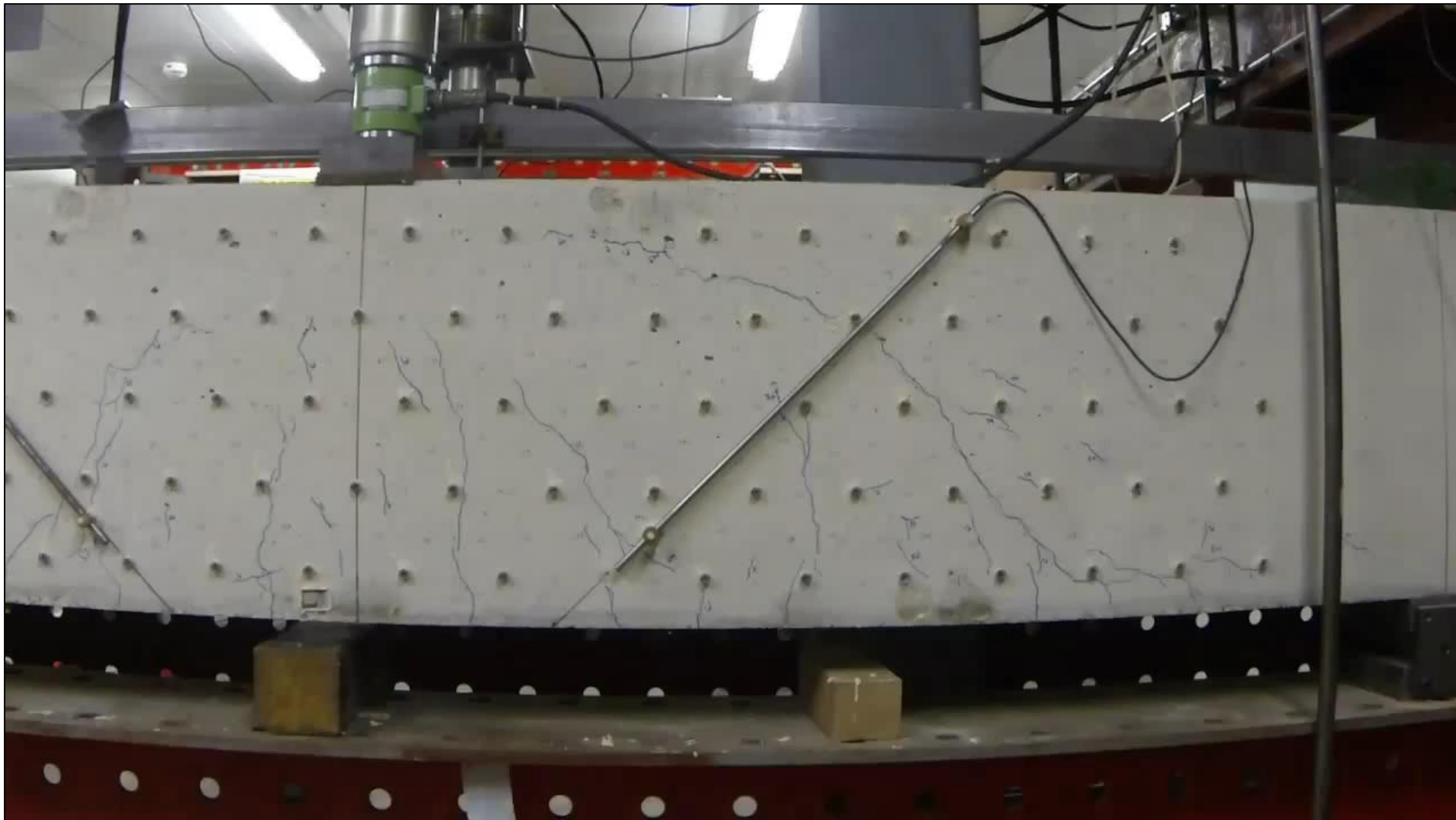
Modos de Ruptura



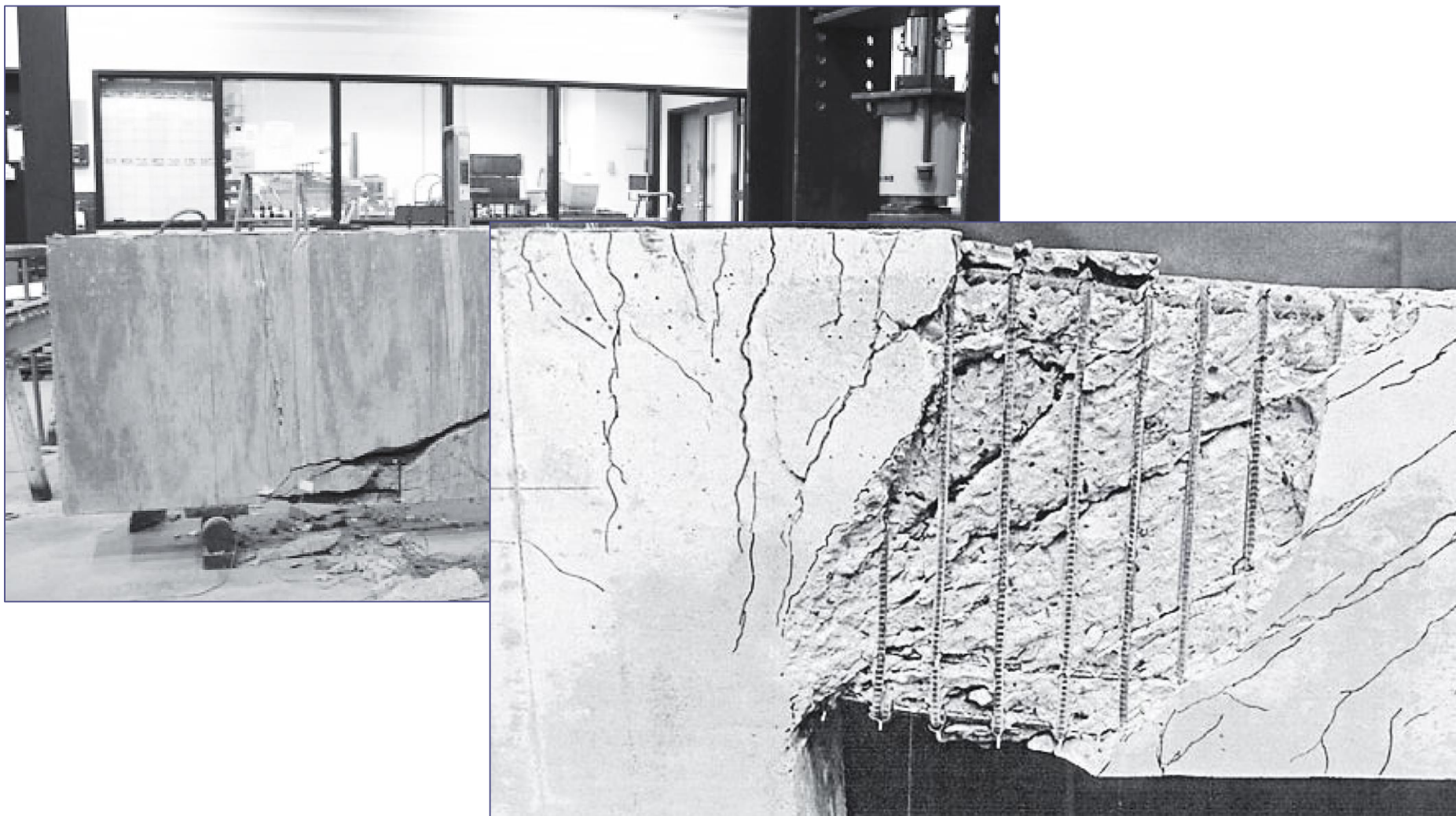
Modos de Ruptura

Modos de Ruptura

Modos de Ruptura



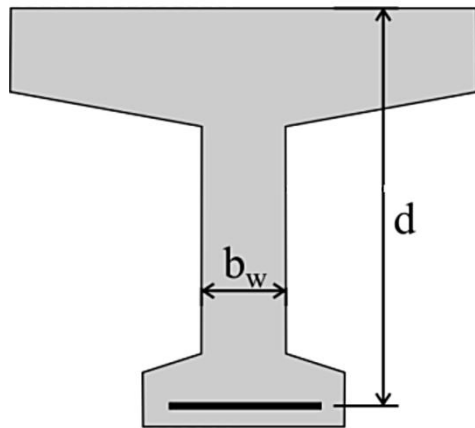
Modos de Ruptura



Modos de Ruptura



Equilíbrio da Diagonal Comprimida



θ : inclinação do plano da fissura de cisalhamento

α : inclinação da armadura de cisalhamento

ψ : ângulo do triângulo BCD equivalente a $[(\alpha + \theta) - 90^\circ]$

b_w : largura da alma da viga

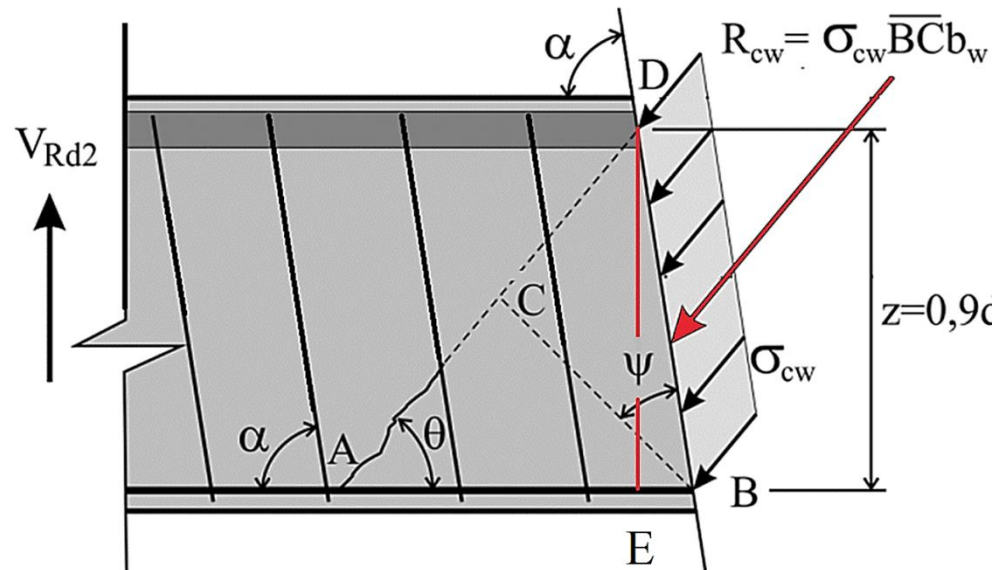
d : altura útil da viga

z : braço de alavanca

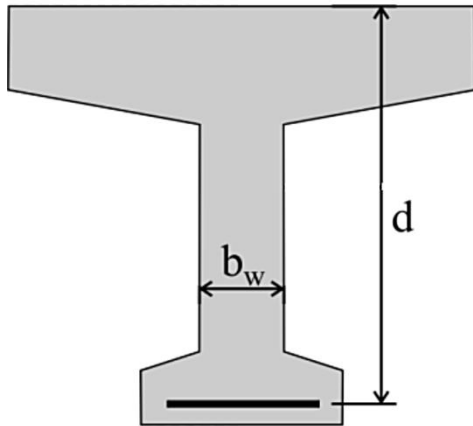
σ_{cw} : tensões atuantes na biela

R_{cw} : força atuante na biela

V_{Rd2} : força cortante resistente de cálculo para esmagamento da biela



Equilíbrio da Diagonal Comprimida

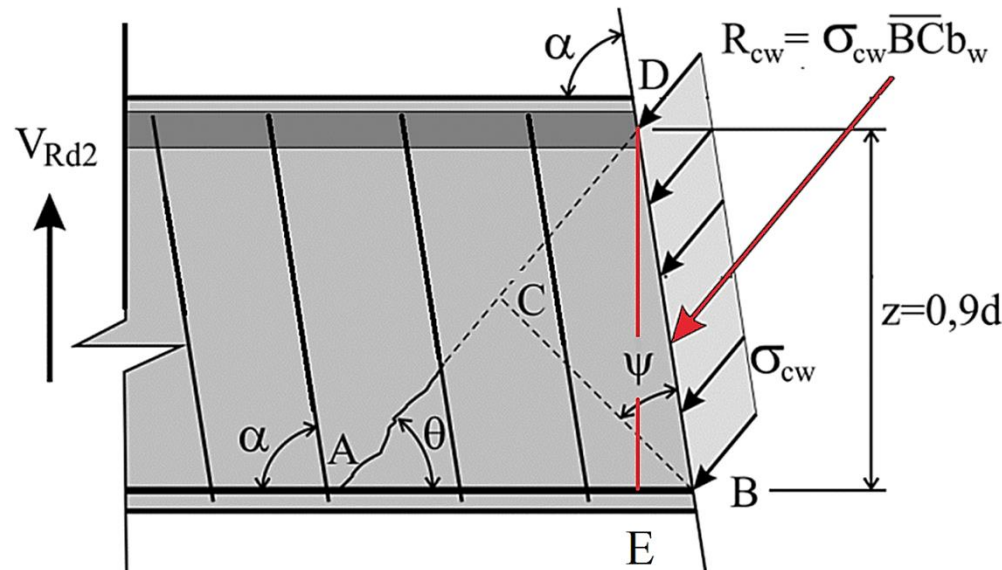


- Considerando o triângulo BDE tem-se:

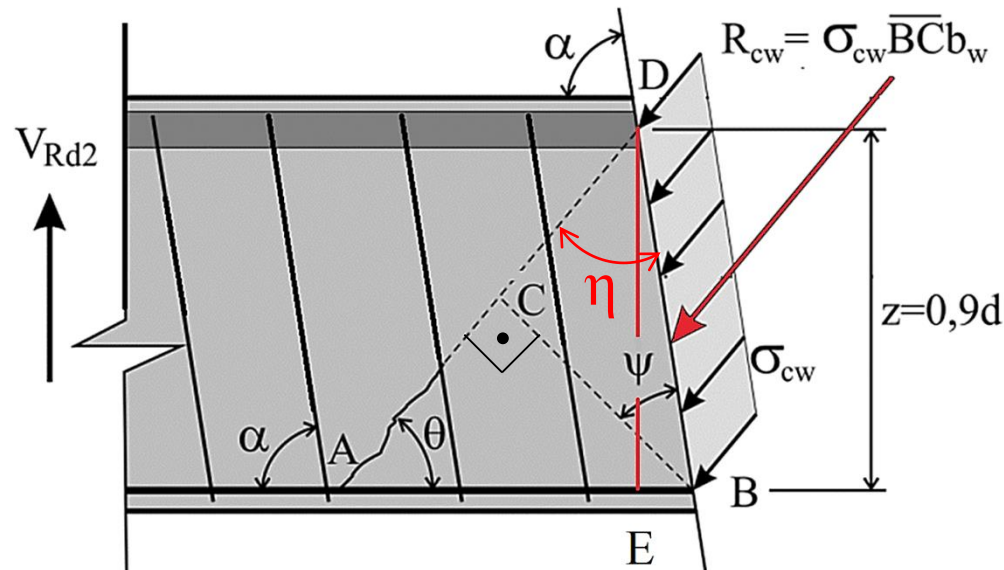
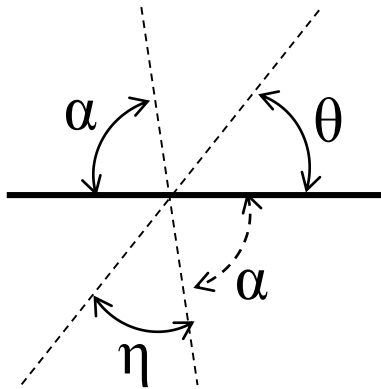
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{z}{BD} \quad \therefore \quad \boxed{\overline{BD} = \frac{z}{\operatorname{sen} \alpha}}$$

- Considerando o triângulo BCD tem-se:

$$\cos \psi = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \quad \therefore \quad \boxed{\overline{BC} = \frac{z}{\operatorname{sen} \alpha} \cdot \cos \psi}$$



Equilíbrio da Diagonal Comprimida



- Considerando o triângulo BCD tem-se:

$$\eta + 90^\circ + \psi = 180^\circ$$

$$\eta = 90^\circ - \psi$$

$$\theta + \alpha + \eta = 180^\circ$$

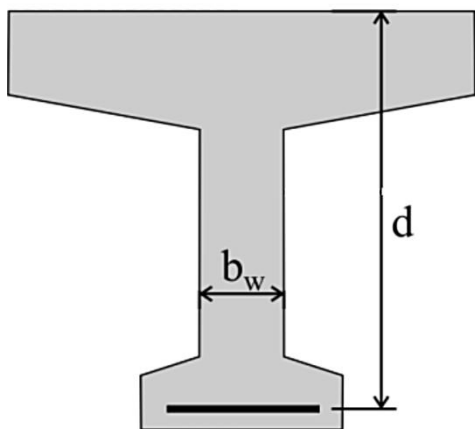
$$\theta + \alpha + 90^\circ - \psi = 180^\circ$$

$$\psi = \theta + \alpha - 90^\circ$$

$$\psi = \alpha - (90^\circ - \theta)$$

$$\cos \psi = \cos [\alpha - (90^\circ - \theta)]$$

Equilíbrio da Diagonal Comprimida



$$\cos \psi = \cos [\alpha - (90^\circ - \theta)]$$

- Sabendo que:

$$\cos (x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin (x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

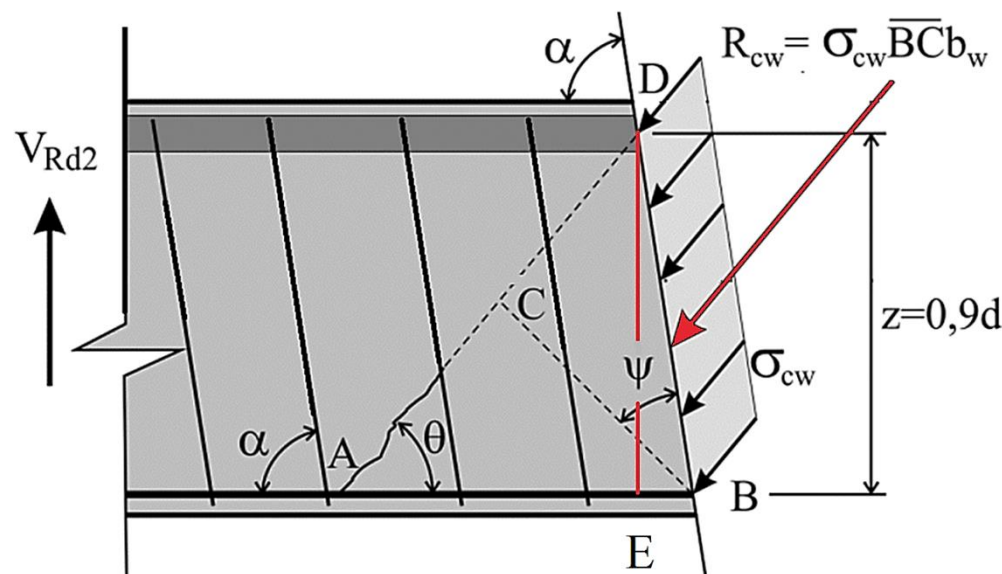
$$\cos \psi = \cos \alpha \cdot \cos (90^\circ - \theta) + \sin \alpha \cdot \sin (90^\circ - \theta)$$

$$\begin{cases} \cos (90^\circ - \theta) = \cancel{\cos 90^\circ}^0 \cdot \cos \theta + \cancel{\sin 90^\circ}^1 \cdot \sin \theta \\ \sin (90^\circ - \theta) = \cancel{\sin 90^\circ}^1 \cdot \cos \theta - \cancel{\cos 90^\circ}^0 \cdot \sin \theta \end{cases}$$

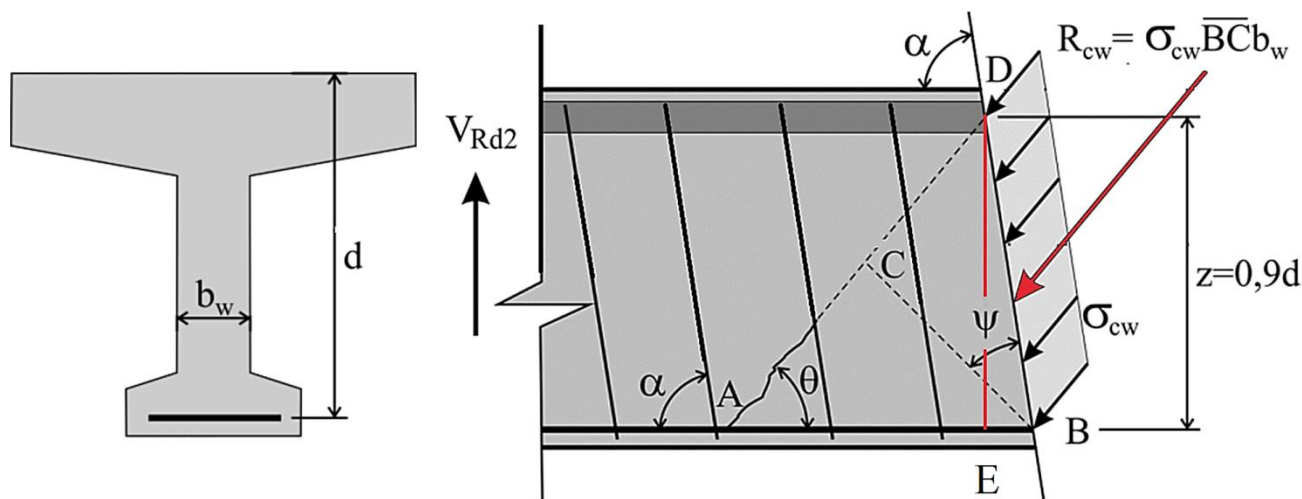
$$\cos \psi = \cos \alpha \cdot \sin \theta + \sin \alpha \cdot \cos \theta \quad (\div \sin \alpha)$$

$$\frac{\cos \psi}{\sin \alpha} = \cotg \alpha \cdot \sin \theta + \cos \theta$$

$$\frac{\cos \psi}{\sin \alpha} = \sin \theta \cdot (\cotg \alpha + \cotg \theta)$$



Equilíbrio da Diagonal Comprimida



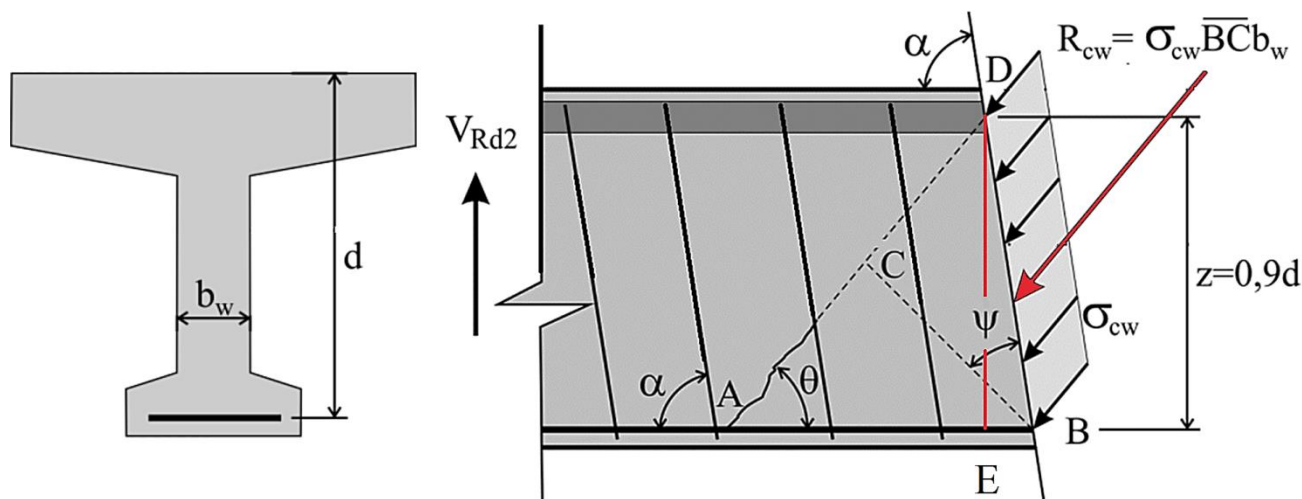
$$\overline{BC} = z \cdot \sin \theta \cdot (\cotg \alpha + \cotg \theta)$$

$$V_{Rd2} = R_{cw} \cdot \sin \theta = (\sigma_{cw} \cdot \overline{BC} \cdot b_w) \cdot \sin \theta$$

$$V_{Rd2} = \left\{ \sigma_{cw} \cdot \left[z \cdot \sin \theta \cdot (\cotg \alpha + \cotg \theta) \right] \cdot b_w \right\} \cdot \sin \theta$$

$$V_{Rd2} = \sigma_{cw} \cdot b_w \cdot z \cdot (\cotg \alpha + \cotg \theta) \cdot \sin^2 \theta$$

Equilíbrio da Diagonal Comprimida



$$z = 0,9 \cdot d \quad \therefore \quad \sigma_{cw} = K \cdot (0,85 \cdot f_{cd}) \quad \therefore \quad K = \frac{1}{1,4} \approx 0,7$$

$$V_{Rd2} = \left(\frac{0,85 \cdot f_{cd}}{1,4} \right) \cdot b_w \cdot 0,9 \cdot d \cdot (\cotg \alpha + \cotg \theta) \cdot \sin^2 \theta$$

$$V_{Rd2} = 0,54 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \cdot \sin^2 \theta \cdot (\cotg \alpha + \cotg \theta)$$

NBR 6118 (2014)

- Para a verificação da resistência máxima ao cisalhamento de um elemento (esmagamento da biela), a norma brasileira estabelece que:

$$V_{sd} \leq V_{Rd,2} \quad (1)$$

Onde:

V_{sd} é a força cortante solicitante de cálculo, na seção transversal;

$V_{Rd,2}$ é a força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto, de acordo com os Modelos de cálculo I ou II;

NBR 6118 (2014)

- O modelo I admite bielas inclinadas de $\theta = 45^\circ$, o que resulta em:

$$V_{Rd2,I} = 0,54 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \cdot \sin^2 \theta \cdot (\cotg \alpha + \cotg \theta)$$

$$V_{Rd2,I} = 0,54 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \cdot 0,5 \cdot (\cotg \alpha + 1)$$

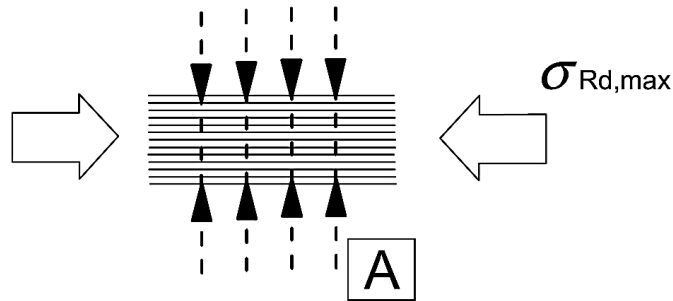
$$V_{Rd2,I} = 0,27 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \cdot (\cotg \alpha + 1)$$

- Se α for assumido como 90° (estribos verticais), resulta:

$$V_{Rd2,I} = 0,27 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d$$

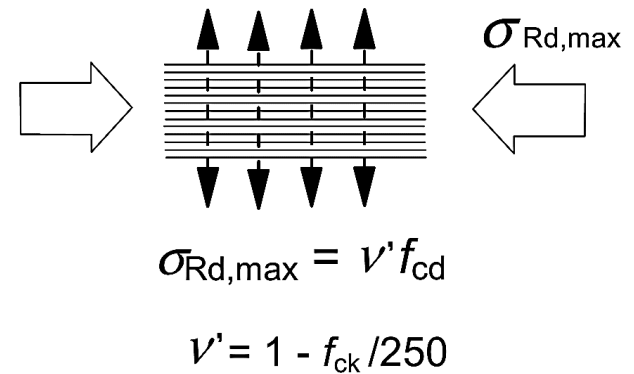
NBR 6118 (2014)

- Normativamente, a tensão na biela deve ser corrigida, a fim de considerar o estado de tensões, conforme indicado:



A Tensão Transversal de Compressão
ou sem Tensão transversal

$$\sigma_{Rd,max} = f_{cd}$$



$$\sigma_{Rd,max} = v' f_{cd}$$

$$v' = 1 - f_{ck} / 250$$

- Assim, a resistência máxima ao cisalhamento no Modelo I é:

$$V_{Rd2,I} = 0,27 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \quad (2)$$

NBR 6118 (2014)

- O Modelo II da ABNT NBR 6118 de 2014 estabelece que a inclinação da biela pode variar $30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$;
- Considerando o estado de tensões na biela (α_{v2}), tem-se:

$$V_{Rd2,II} = 0,54 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \cdot \sin^2 \theta \cdot (\cotg \alpha + \cotg \theta) \quad (3)$$

Onde:

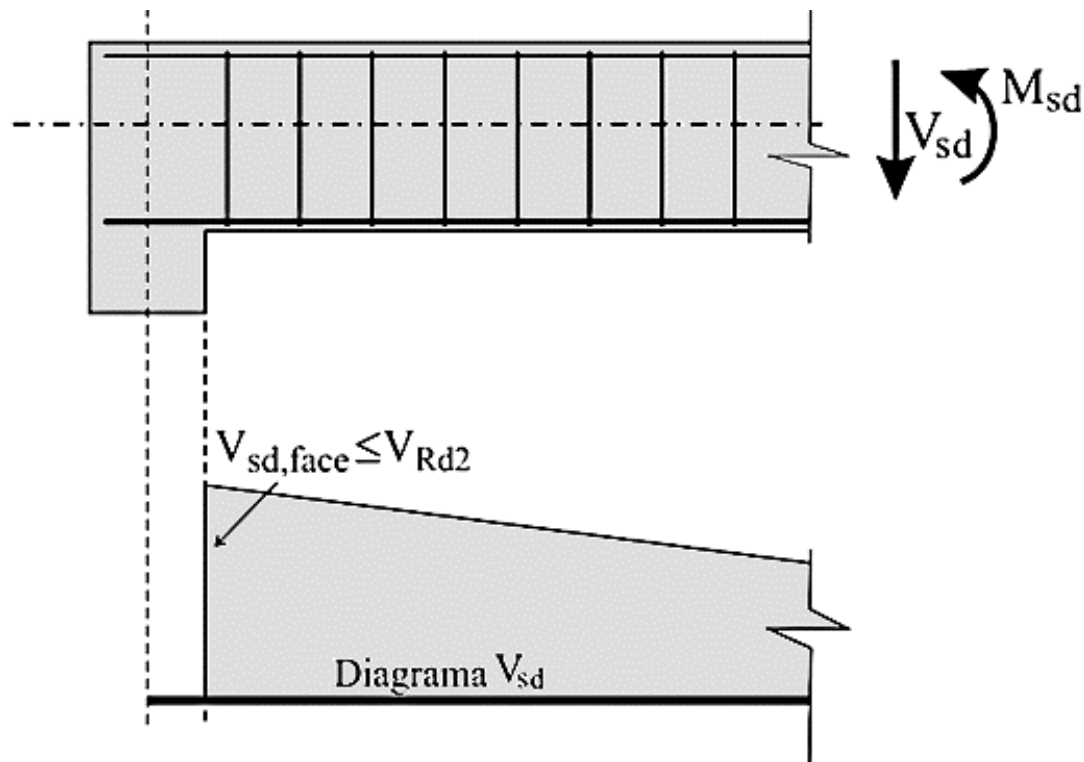
$$\alpha_{v2} = 1 - \frac{f_{ck}}{250}$$

$$30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$$

$$45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$$

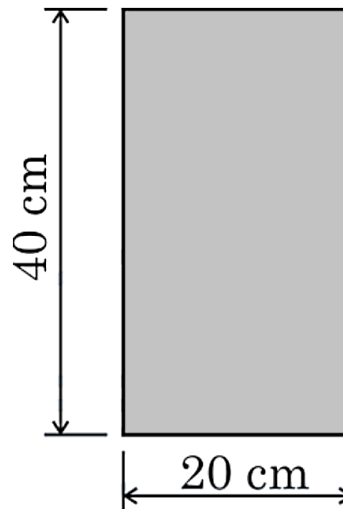
NBR 6118 (2014)

- No dimensionamento ao cisalhamento, deve-se considerar a força cortante atuante na face do apoio, conforme indicado abaixo:

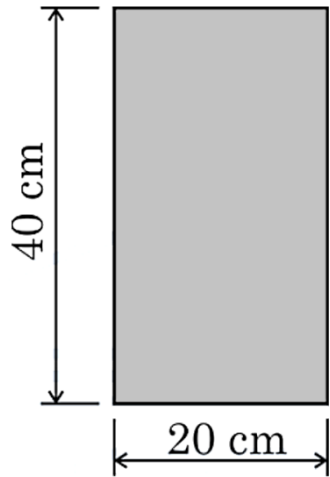


Exemplo 1: Determinar a força cortante máxima solicitante de cálculo que pode ser aplicada na viga com a seção transversal indicada abaixo segundo os Modelos I e II da ABNT NBR 6118 (2014). Admitir:

- Para o Modelo II $\theta = 30^\circ$ e $\alpha = 90^\circ$;
- Concreto C25;
- $d = 0,90 h$;
- E.L.U., combinações normais ($\gamma_c = 1,4$).



Exemplo 1:



- Modelo I:

$$V_{Rd2,I} = 0,27 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d$$

$$V_{Rd2,I} = 0,27 \cdot \left(1 - \frac{25}{250}\right) \cdot \left(\frac{25}{1,4}\right) \cdot 200 \cdot (0,90 \cdot 400)$$

$$V_{Rd2,I} = 312,43 \text{ kN}$$

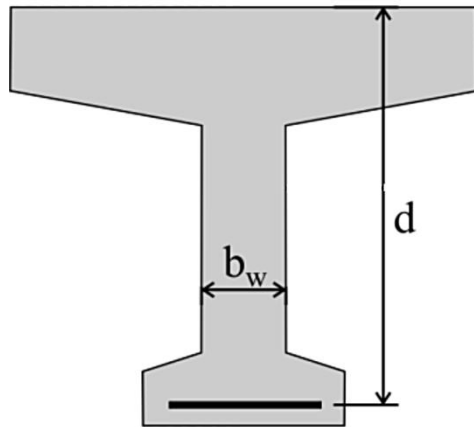
- Modelo II:

$$V_{Rd2,II} = 0,54 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \cdot \sin^2 \theta \cdot (\cotg \alpha + \cotg \theta)$$

$$V_{Rd2,II} = 0,54 \cdot \left(1 - \frac{25}{250}\right) \cdot \left(\frac{25}{1,4}\right) \cdot 200 \cdot (0,90 \cdot 400) \cdot \sin^2 (30^\circ) \cdot [\cotg (90^\circ) + \cotg (30^\circ)]$$

$$V_{Rd2,II} = 270,57 \text{ kN}$$

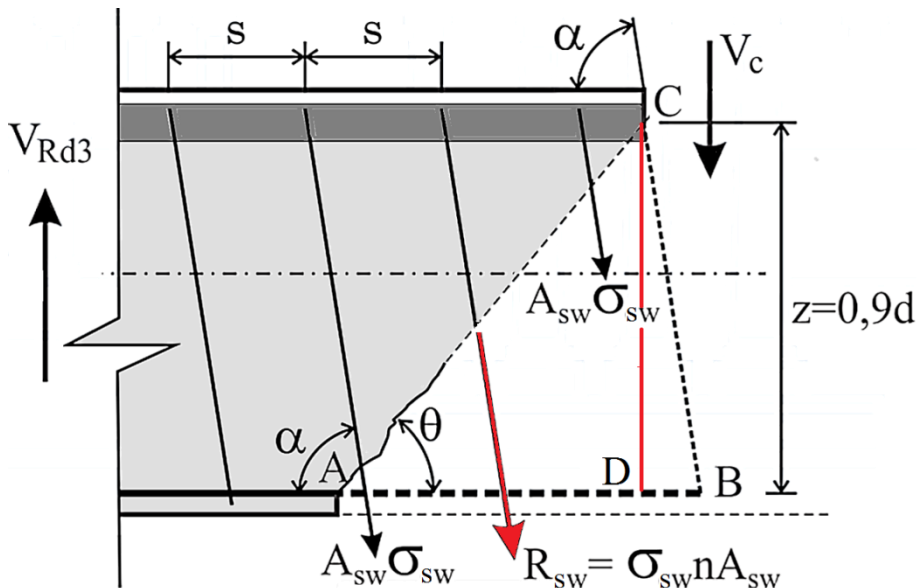
Equilíbrio da Diagonal Tensionada



θ : inclinação do plano da fissura de cisalhamento

α : inclinação da armadura de cisalhamento

s : espaçamento da armadura de cisalhamento que corta o plano AC do trecho da viga

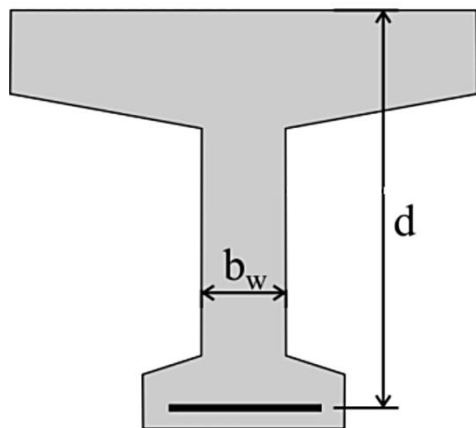


n : é o número de barras da armadura de cisalhamento que corta o plano AC (Plano de ruptura por cisalhamento) do trecho da viga

d : altura útil da viga

z : braço de alavanca

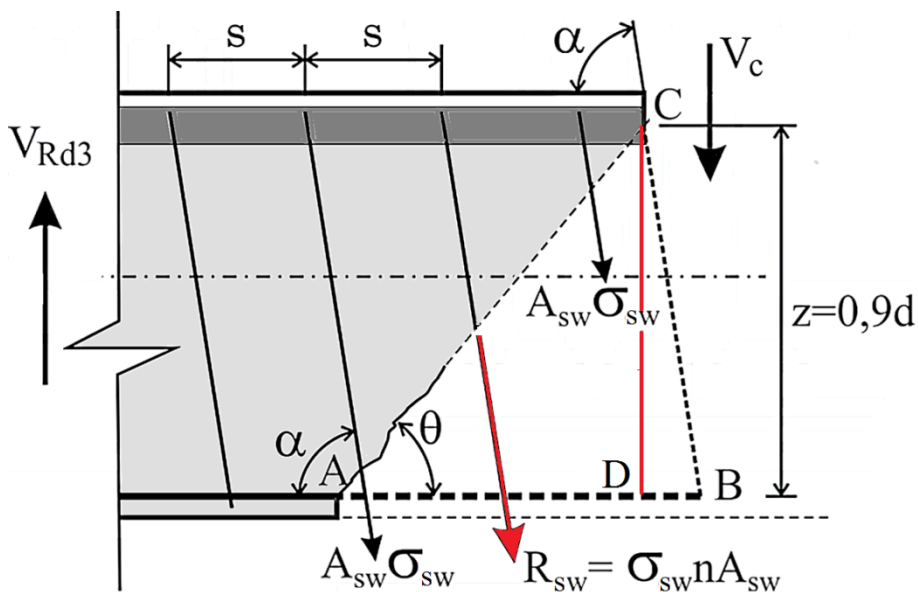
Equilíbrio da Diagonal Tractionada



A_{sw} : área da seção transversal de uma barra das armaduras de cisalhamento

σ_{sw} : tensão atuante na armadura de cisalhamento

R_{sw} : força atuante na armadura de cisalhamento



V_{Rd3} : força cortante resistente de cálculo para ruína por tração diagonal

V_{sw} : é a componente vertical da força R_{sw}

V_c : é a parcela da força cortante absorvida por mecanismos resistentes complementares ao da treliça de Morsh

Equilíbrio da Diagonal Tractionada

- Considerando o triângulo ABC tem-se:

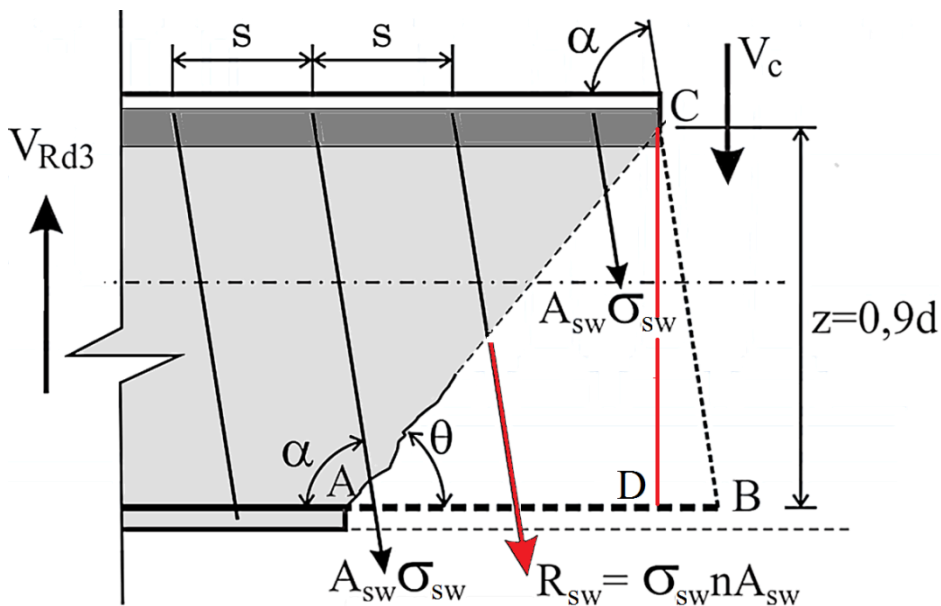
$$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB} = \frac{z}{\operatorname{tg} \theta} + \frac{z}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\overline{AB} = z \cdot (\cotg \theta + \cotg \alpha)$$

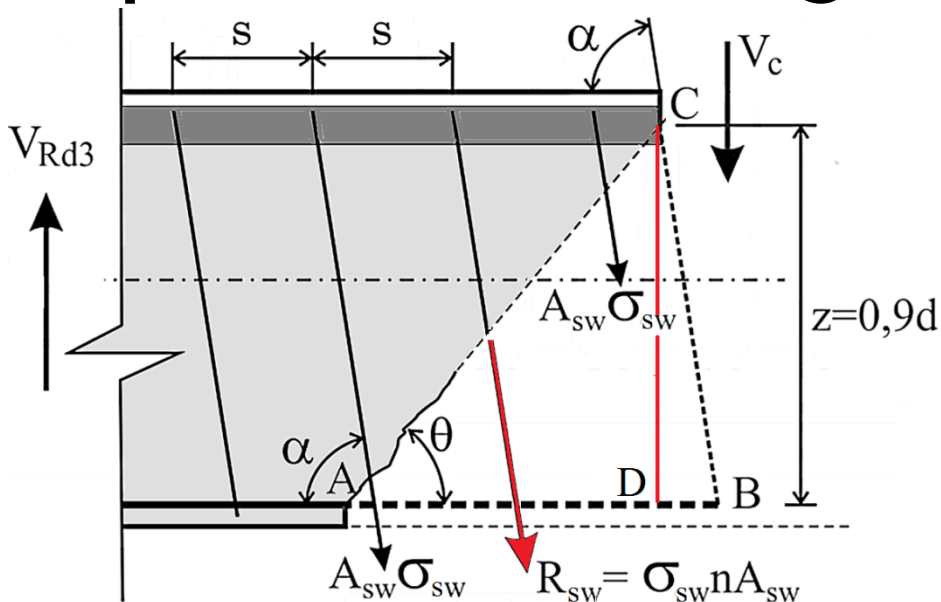
- O nº de barras da armadura de cisalhamento que corta o plano AC (projeção horizontal AB) é dado por:

$$n = \frac{\overline{AB}}{s} = \frac{z \cdot (\cotg \theta + \cotg \alpha)}{s}$$

$$n = \frac{z}{s} \cdot (\cotg \theta + \cotg \alpha)$$



Equilíbrio da Diagonal Tractionada



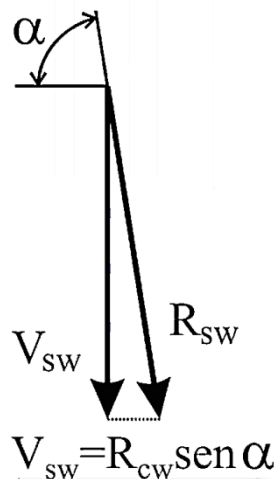
- Impondo o equilíbrio de forças verticais:

$$\sum V = 0$$

$$V_{Rd3} - R_{sw} \cdot \sin \alpha - V_c = 0$$

$$V_{Rd3} = R_{sw} \cdot \sin \alpha + V_c$$

$$V_{Rd3} = V_c + V_{sw}$$



Equilíbrio da Diagonal Tractionada

- Força nas Armaduras de Cisalhamento

$$V_{sw} = R_{sw} \cdot \sin \alpha = n \cdot (A_{sw} \cdot \sigma_{sw}) \cdot \sin \alpha$$

$$V_{sw} = \left[\frac{z}{s} \cdot (\cotg \theta + \cotg \alpha) \right] \cdot (A_{sw} \cdot \sigma_{sw}) \cdot \sin \alpha$$

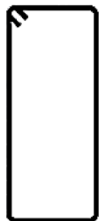
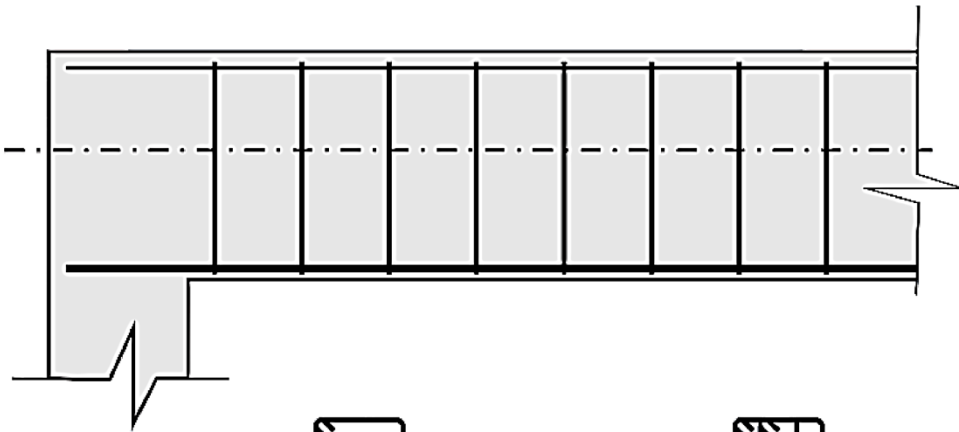
$$V_{sw} = \left[\frac{0,9 \cdot d}{s} \cdot (\cotg \theta + \cotg \alpha) \right] \cdot (A_{sw} \cdot \sigma_{sw}) \cdot \sin \alpha$$

$$V_{sw} = \frac{A_{sw}}{s} \cdot 0,9 \cdot d \cdot \sigma_{sw} \cdot (\cotg \theta + \cotg \alpha) \cdot \sin \alpha$$

Armaduras de Cisalhamento em Vigas

• Estribos

- Tipo mais comum;
- Usualmente verticais ($\alpha = 90^\circ$).



estribo de 2 ramos

$$A_{sw} = 2 \cdot A_s$$

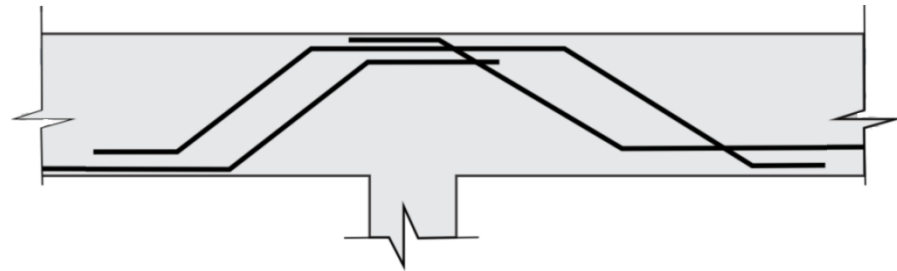


estribo de 4 ramos

$$A_{sw} = 4 \cdot A_s$$

• Barras dobradas

- Podem aproveitar as armaduras de flexão;
- Usualmente inclinadas a 45° .



NBR 6118 (2014)

- Para a verificação da resistência à tração diagonal de uma seção de concreto armado, a norma brasileira estabelece que:

$$V_{sd} \leq V_{Rd,3} = V_c + V_{sw} \quad (4)$$

Onde:

V_{sd} é a força cortante solicitante de cálculo, na seção transversal;

$V_{Rd,3}$ é a força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína por tração diagonal;

V_c é a força parcela da força cortante absorvida pelo concreto em mecanismos complementares aos de treliça;

V_{sw} é a força cortante absorvida pela armadura de cisalhamento, de acordo com os modelos I ou II.

NBR 6118 (2014) - Modelo I

- Neste modelo, tensão na armadura de cisalhamento, é assumida como:

Estribos

$$f_{ywd} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{f_{ywk}}{\gamma_s} \\ 435 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

Barras Dobradas

$$f_{ywd} = \min \left\{ \begin{array}{l} 0,7 \cdot \frac{f_{ywk}}{\gamma_s} \\ 435 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

- Além disso, θ é assumido como sendo 45° , o que resulta em:

$$V_{sw} = \left(\frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\cotg 45^\circ + \cotg \alpha) \cdot \sen \alpha$$

$$V_{sw} = \left(\frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\sen \alpha + \cos \alpha) , \text{ com } 45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$$

NBR 6118 (2014) - Modelo I

- A resistência ao cisalhamento de seções de concreto sob flexão simples e na flexo tração, com linha neutra cortando a seção, é expressa como:

$$V_{Rd3,I} = V_c + V_{sw}$$

$$V_c = V_{c0} = 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d$$

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk,inf}}{\gamma_c} = \frac{0,7 \cdot f_{ctm}}{\gamma_c} = \frac{0,7 \cdot 0,3 \cdot (f_{ck})^{2/3}}{1,4} = 0,15 \cdot (f_{ck})^{2/3}$$

$$V_c = V_{c0} = 0,09 \cdot (f_{ck})^{2/3} \cdot b_w \cdot d \quad (5)$$

$$V_{sw} = \left(\frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha) \quad (6)$$

NBR 6118 (2014) - Modelo II

- No Modelo II, $30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$. No caso de flexão simples e na flexo tração, com linha neutra cortando a seção, a resistência à tração diagonal é expressa como:

$$V_{Rd3,II} = V_c + V_{sw}$$

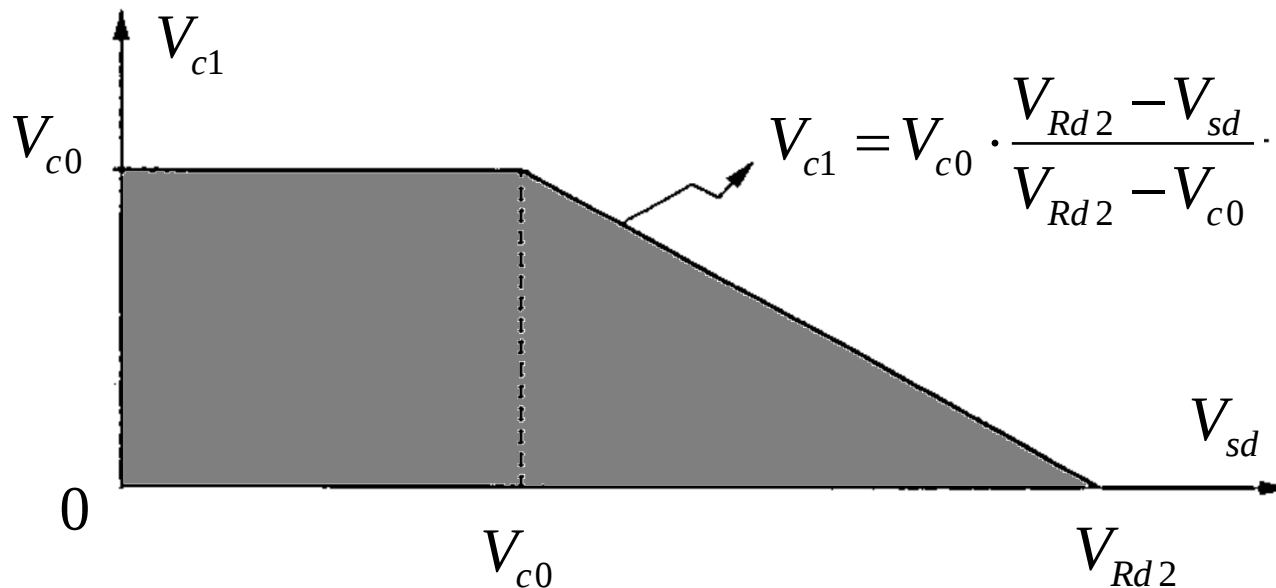
$$V_{sw} = \frac{A_{sw}}{s} \cdot 0,9 \cdot d \cdot \sigma_{sw} \cdot (\cotg \theta + \cotg \alpha) \cdot \sen \alpha$$

$$V_c = V_{c1}$$

$$V_{c1} = \begin{cases} V_{c0} , & \text{quando } V_{sd} \leq V_{c0} \\ 0 , & \text{quando } V_{sd} = V_{Rd2} \end{cases} , \text{ interpolando-se linearmente para valores intermediários}$$

NBR 6118 (2014) - Modelo II

- No Modelo II, admite-se que a parcela resistente do concreto diminui a medida que a força cortante solicitante cresce, tendo como referência o valor de V_{c0} , conforme indicado no gráfico abaixo.



NBR 6118 (2014) - Modelo II

- No Modelo II, tem-se então que:

$$V_{Rd3,II} = V_c + V_{sw}$$

$$V_c = V_{c1}$$

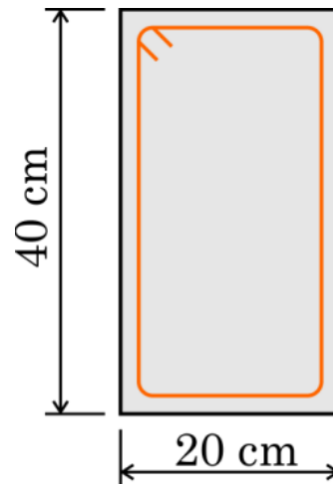
$$V_{c1} = V_{c0} \cdot \frac{V_{Rd2} - V_{sd}}{V_{Rd2} - V_{c0}} \leq V_{c0} \quad (7)$$

$$V_{c0} = 0,09 \cdot (f_{ck})^{2/3} \cdot b_w \cdot d$$

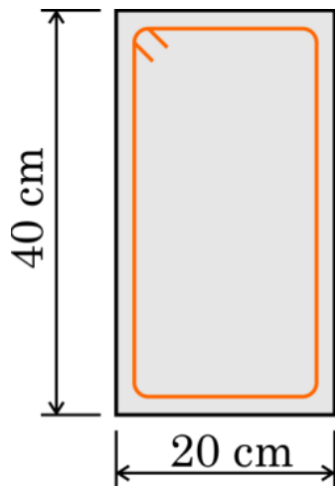
$$V_{sw} = \frac{A_{sw}}{s} \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\cotg \theta + \cotg \alpha) \cdot \sen \alpha \quad (8)$$

Exemplo 2: Verificar para a seção abaixo qual a máxima força cortante solicitante de cálculo que pode ser aplicada. Use como referência os critérios estabelecidos pela ABNT NBR 6118 (2014) para os Modelos I e II, assumindo:

- Para o Modelo II $\theta = 30^\circ$ e $\alpha = 90^\circ$;
- Aço CA-50 e Concreto C25 ($\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);
- $d = 0,90 h$;
- Estribos verticais de dois ramos com barras de 6,3 mm a cada 10 cm.



Exemplo 2:



- Modelo I:

$$V_{Rd3,l} = V_c + V_{sw}$$

$$V_c = 0,09 \cdot (f_{ck})^{2/3} \cdot b_w \cdot d = 0,09 \cdot (25)^{2/3} \cdot 200 \cdot 0,9 \cdot 400$$

$$\underline{V_c = 55,4 \text{ kN}}$$

$$V_{sw} = \left(\frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

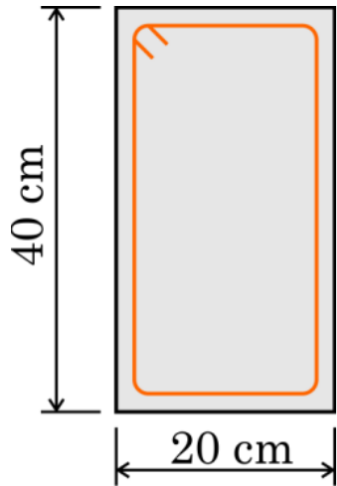
$$V_{sw} = \left[2 \cdot \frac{\pi \cdot (6,3)^2}{4 \cdot 100} \right] \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 400 \cdot \frac{500}{1,15} \cdot (\sin 90 + \cos 90)$$

$$\underline{V_{sw} = 87,8 \text{ kN}}$$

$$V_{Rd3,l} = 55,4 + 87,8$$

$$\boxed{V_{Rd3,l} = 143,2 \text{ kN}}$$

Exemplo 2:



- Modelo II:

$$V_{Rd3,II} = V_c + V_{sw}$$

$$V_{c0} = 0,09 \cdot (f_{ck})^{2/3} \cdot b_w \cdot d \quad \therefore \quad \underline{V_{c0} = 55,4 \text{ kN}}$$

$$V_{Rd2,II} = 0,54 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \cdot \sin^2 \theta \cdot (\cotg \alpha + \cotg \theta)$$

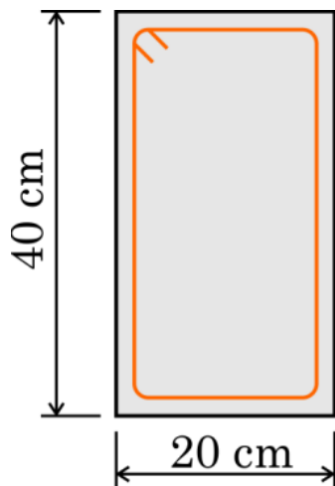
$$\underline{V_{Rd2,II} = 270,6 \text{ kN}}$$

$$V_{sw} = \left(\frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\cotg \theta + \cotg \alpha) \cdot \sin \alpha$$

$$V_{sw} = \left[2 \cdot \frac{\pi \cdot (6,3)^2}{4 \cdot 100} \right] \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 400 \cdot \frac{500}{1,15} \cdot (\cotg 30 + \cotg 90) \cdot \sin 90$$

$$\underline{V_{sw} = 152,1 \text{ kN}}$$

Exemplo 2:



- Modelo II:

$$V_{cl} = V_{c0} \cdot \frac{V_{Rd2} - V_{sd}}{V_{Rd2} - V_{c0}} \leq V_{c0}$$

$$V_{cl} = 55,4 \cdot \frac{270,6 - V_{sd}}{270,6 - 55,4} \leq 55,4 \text{ kN}$$

$$V_{cl} = \frac{270,6 - V_{sd}}{3,88} \leq 55,4 \text{ kN} \quad (V_{cl} \text{ é função de } V_{sd} \Rightarrow \text{iterativo})$$

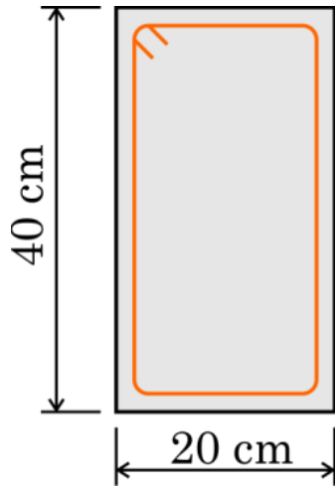
1ª Tentativa: desconsiderar V_c fazendo $V_{sd} = V_{Rd3} = V_{sw} = 152,1 \text{ kN}$

$$V_{cl} = \frac{270,6 - 152,1}{3,88} = 30,5 \leq 55,4 \text{ kN}$$

$$V_c = V_{cl} = 30,5 \text{ kN}$$

$$V_{Rd3} = V_c + V_{sw} = 30,5 + 152,1 = 182,6 \text{ kN} > 152 \text{ kN}$$

Exemplo 2:



- Modelo II:

$$2^{\text{a}} \text{ Tentativa: } V_{sd} = V_{Rd3} = 182,6 \text{ kN}$$

$$V_{cl} = \frac{270,6 - 182,6}{3,88} = 22,7 \leq 55,4 \text{ kN}$$

$$V_c = V_{cl} = 22,7 \text{ kN}$$

$$V_{Rd3} = V_c + V_{sw} = 22,7 + 152,1 = 174,8 \text{ kN} < 182,6 \text{ kN}$$

$$3^{\text{a}} \text{ Tentativa: } V_{sd} = V_{Rd3} = 174,8 \text{ kN}$$

$$V_{cl} = \frac{270,6 - 174,8}{3,88} = 24,7 \leq 55,4 \text{ kN}$$

$$V_c = V_{cl} = 24,7 \text{ kN}$$

$$V_{Rd3} = V_c + V_{sw} = 24,7 + 152,1 = 176,8 \text{ kN} > 174,8 \text{ kN}$$

Exemplo 2:

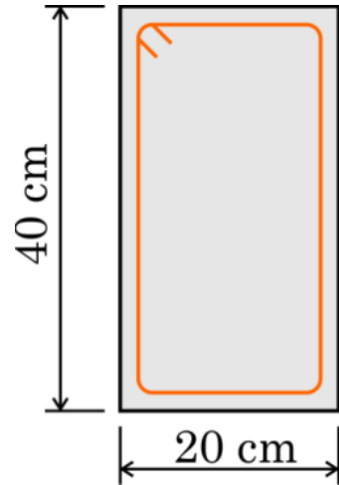
- Modelo II:

$$4^{\text{a}} \text{ Tentativa: } V_{sd} = V_{Rd3} = 176,8 \text{ kN}$$

$$V_{cl} = \frac{270,6 - 176,8}{3,88} = 24,2 \leq 55,4 \text{ kN}$$

$$V_c = V_{cl} = 24,2 \text{ kN}$$

$$V_{Rd3} = V_c + V_{sw} = 24,2 + 152,1 = 176,3 \text{ kN} < 176,8 \text{ kN}$$



$$5^{\text{a}} \text{ Tentativa: } V_{sd} = V_{Rd3} = 176,3 \text{ kN}$$

$$V_{cl} = \frac{270,6 - 176,3}{3,88} = 24,3 \leq 55,4 \text{ kN}$$

$$V_c = V_{cl} = 24,3 \text{ kN}$$

$$V_{Rd3} = V_c + V_{sw} = 24,3 + 152,1 = 176,4 \text{ kN} \approx 176,3 \text{ kN}$$

$$V_{Rd3,II} = 176,4 \text{ kN}$$

NBR 6118 (2014) - Armadura Mínima

- Elementos lineares submetidos à força cortante devem ter uma armadura mínima transversal para controle de fissuração e ductilidade. Exceção:
 1. Elementos onde $b_w > 5 \cdot d$ (devem ser tratados como laje), onde d é a altura útil da seção;
 2. Nervuras de lajes nervuradas espaçadas com menos de 65 cm;
 3. Pilares e elementos lineares de fundação submetidos predominantemente à compressão, que atendam simultaneamente, na combinação mais desfavorável das ações no E.L.U (seção no estágio I), as seguintes condições:
 - Em nenhum ponto pode ser ultrapassada a tensão f_{ctk} ;
 - $V_{sd} \leq V_c$, sendo V_c definido no item 17.4.2.2 da ABNT NBR 6118 (2014).

NBR 6118 (2014) - Armadura Mínima

$$\rho_{sw} = \frac{A_{sw}}{b_w \cdot s \cdot \sin \alpha} \geq \rho_{min} = 0,2 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{ywk}} = 0,2 \cdot \frac{0,3 \cdot f_{ck}^{2/3}}{\min \{ f_{yk} ; 500 \text{ MPa} \}}$$

Onde:

ρ_{sw} é a taxa geométrica de armadura transversal;

A_{sw} é a área da seção transversal dos estribos;

s é o espaçamento dos estribos medido na direção longitudinal da viga;

α é a inclinação dos estribos em relação ao eixo longitudinal da viga;

b_{sw} é a largura média da alma, medida ao longo da altura útil da seção;

f_{ywk} é a resistência característica ao escoamento do aço da armadura transversal;

$f_{ct,m}$ é a resistência média à tração do concreto.

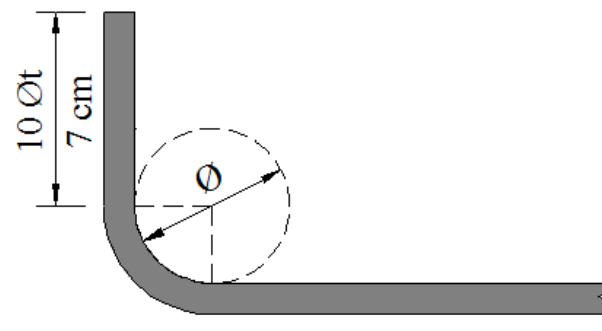
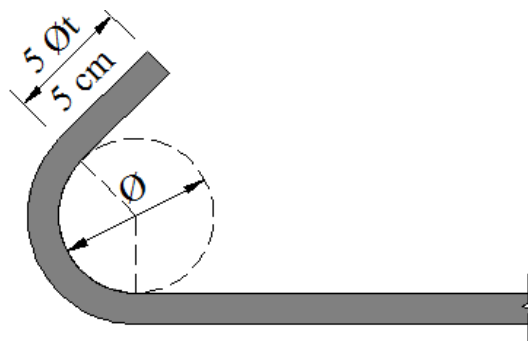
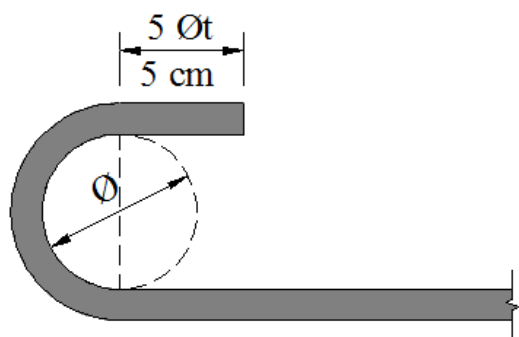
NBR 6118: Características dos Estribos

- Os estribos para força cortante podem ser fechados ou abertos;
- Devem ter um trecho horizontal que envolva as barras das armaduras longitudinais de tração e sua ancoragem deve ser garantida na outra extremidade. A ancoragem dos estribos deve ser garantida por ganchos ou por barras longitudinais soldadas. Os ganchos podem ser:
 - a) semicirculares ou em ângulo de 45° (interno), com ponta reta de comprimento igual a $5 \varnothing_t$, porém não inferior a 5 cm;
 - b) em ângulo reto, com ponta reta de comprimento maior ou igual a $10 \varnothing_t$, porém não inferior a 7 cm (este tipo de gancho não pode ser utilizado para barras e fios lisos).

NBR 6118: Características dos Estribos

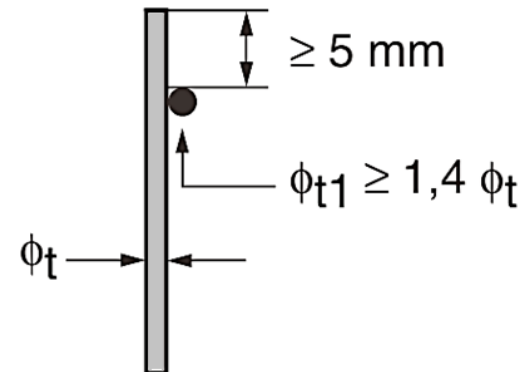
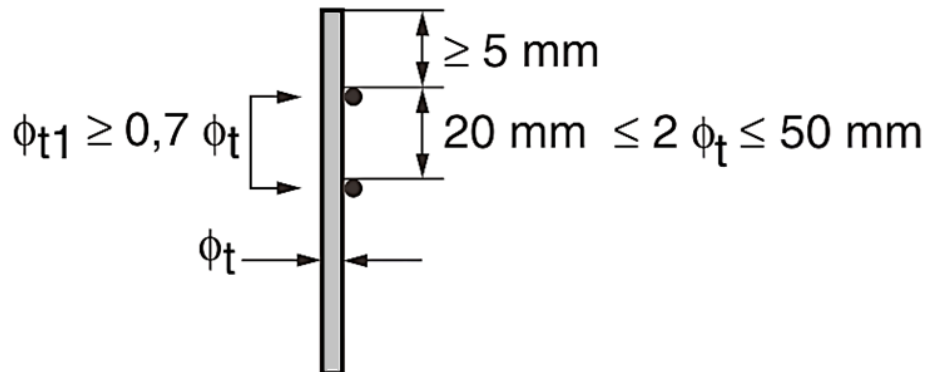
Tabela 9.2 – Diâmetro dos pinos de dobramento para estribos

Bitola mm	Tipo de aço		
	CA-25	CA-50	CA-60
≤ 10	$3 \phi_t$	$3 \phi_t$	$3 \phi_t$
$10 < \phi < 20$	$4 \phi_t$	$5 \phi_t$	—
≥ 20	$5 \phi_t$	$8 \phi_t$	—



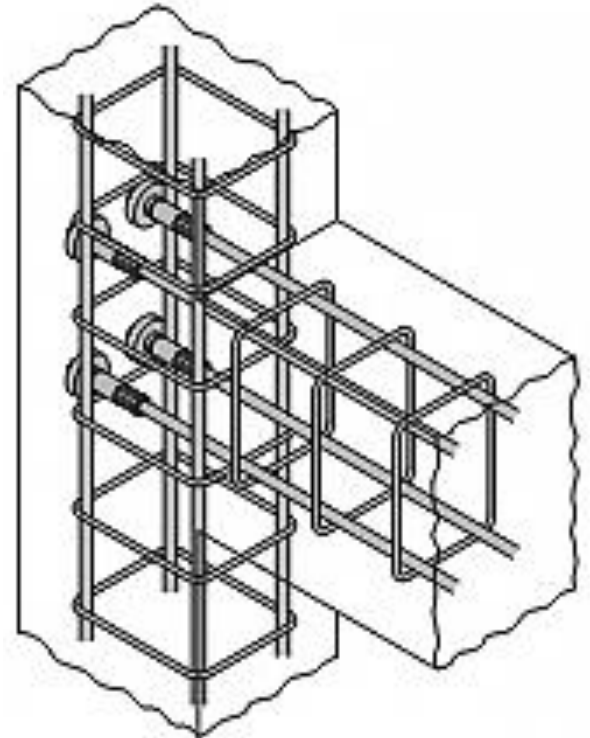
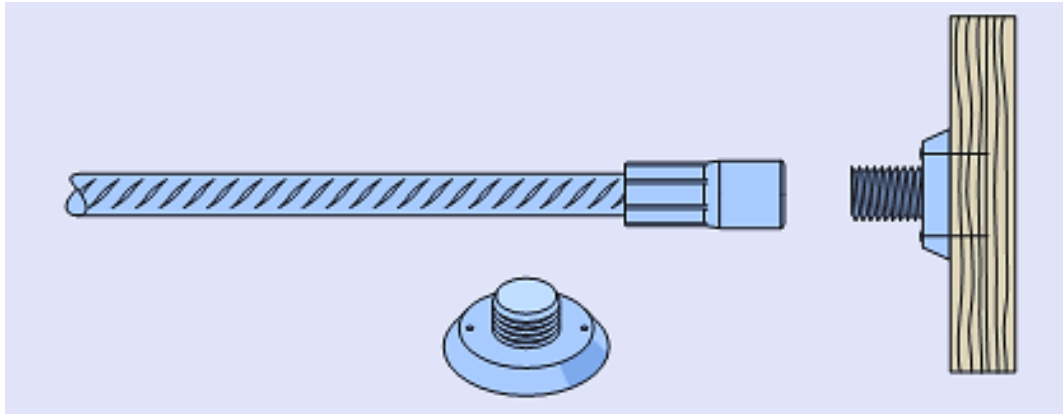
NBR 6118: Características dos Estribos

- Desde que a resistência ao cisalhamento da solda para uma força mínima de $A_s \cdot f_{yd}$ seja comprovada por ensaio, pode ser feita a ancoragem de estribos, por meio de barras transversais soldadas, de acordo com:
 - 2 barras soldadas com diâmetro $\phi_{t1} > 0,7 \phi_t$ para estribos constituídos por um ou dois ramos;
 - 1 barra soldada com diâmetro $\phi_{t1} \geq 1,4 \phi_t$ para estribos de dois ramos.



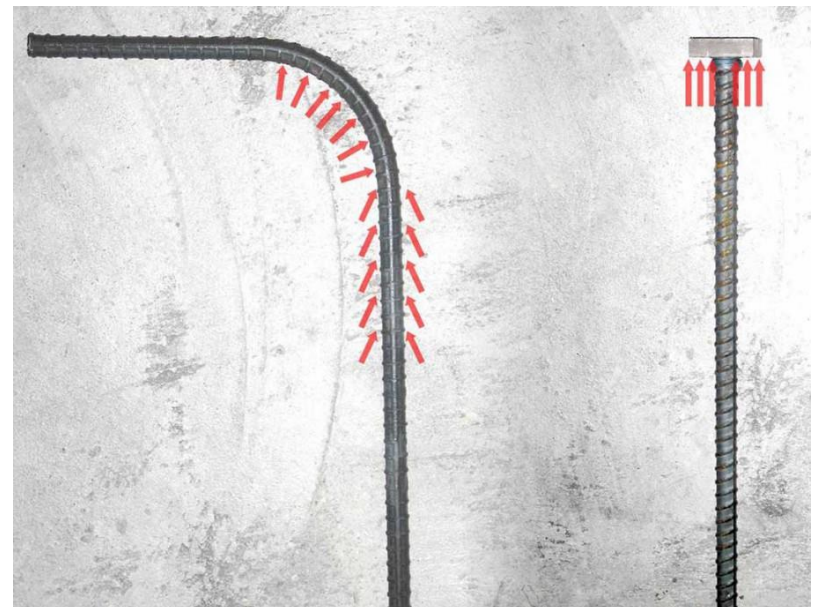
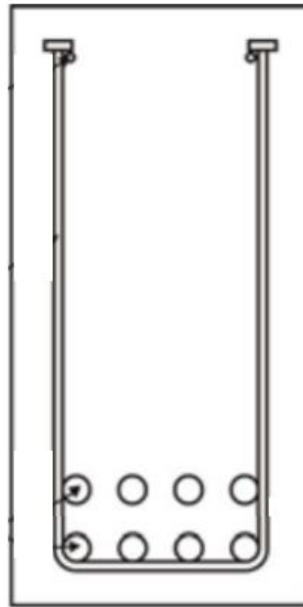
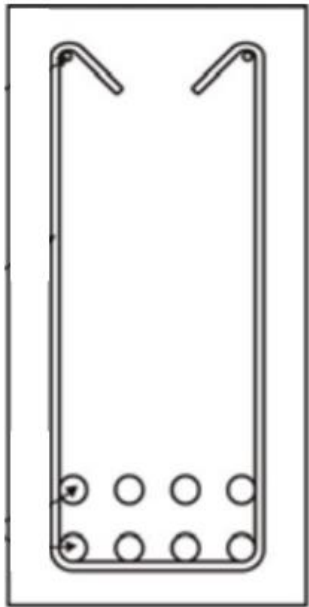
NBR 6118: Características dos Etribos

- Dispositivos mecânicos podem ser acoplados às armaduras de forma a garantir a ancoragem, mas a eficiência do conjunto deve ser justificada e, quando for o caso, comprovada através de ensaios.



NBR 6118: Características dos Etribos

- Dispositivos mecânicos podem ser acoplados às armaduras de forma a garantir a ancoragem, mas a eficiência do conjunto deve ser justificada e, quando for o caso, comprovada através de ensaios.



NBR 6118: Características dos Estribos

- O diâmetro dos estribos deve ser tal que: $5 \text{ mm} \leq \phi_w \leq \frac{b_w}{10}$
- No caso de barras lisas, seu diâmetro não poderá ser superior a 12 mm;
- No caso de estribos formados por telas soldadas, o diâmetro mínimo pode ser reduzido para 4,2 mm, desde que sejam tomadas precauções contra a corrosão dessa armadura.

NBR 6118: Características dos Estribos

- O ângulo de inclinação da armadura transversal em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural, podendo-se tomar $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$;
- O espaçamento mínimo entre estribos na direção longitudinal do elemento estrutural, deve ser suficiente para permitir a passagem do vibrador. O usual é:

$$s_{\min} = \phi_{\text{vibrador}} + 10 \text{ mm}$$



$$\phi_{\text{vibrador}} = 25 \text{ mm a } 60 \text{ mm}$$

NBR 6118: Características dos Estribos

- O espaçamento máximo deve atender às seguintes condições:

$$- \frac{V_d}{V_{Rd2}} \leq 0,67 \quad \therefore \quad s_{\max} = \min \begin{cases} 0,6 \cdot d \\ 300 \text{ mm} \end{cases}$$

$$- \frac{V_d}{V_{Rd2}} > 0,67 \quad \therefore \quad s_{\max} = \min \begin{cases} 0,3 \cdot d \\ 200 \text{ mm} \end{cases}$$

- O espaçamento transversal máximo entre ramos sucessivos deve ser de:

$$- \frac{V_d}{V_{Rd2}} \leq 0,20 \quad \therefore \quad s_{t,\max} = \min \begin{cases} d \\ 800 \text{ mm} \end{cases}$$

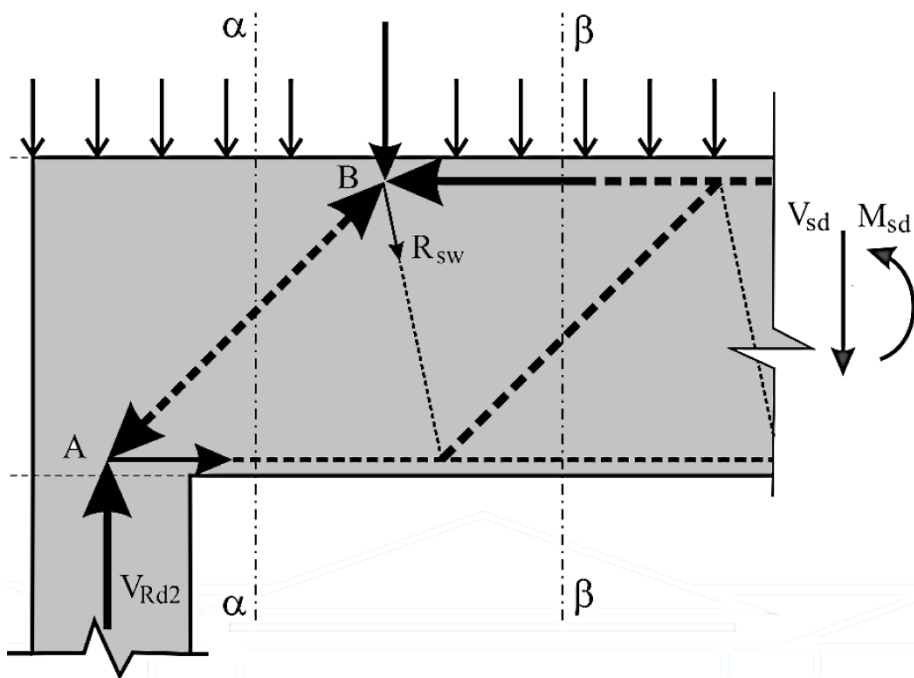
$$- \frac{V_d}{V_{Rd2}} > 0,20 \quad \therefore \quad s_{t,\max} = \min \begin{cases} 0,6 \cdot d \\ 350 \text{ mm} \end{cases}$$

NBR 6118: Características dos Estribos

- A armadura transversal (A_{sw}) pode ser constituída por estribos ou pela composição de estribos e barras dobradas;
- Quando forem utilizadas barras dobradas, estas não podem suportar mais do que 60% do esforço total resistido pela armadura;
- Podem ser utilizadas barras verticais soldadas combinadas com estribos fechados, mantida a proporção resistente estabelecida acima, quando
- Quando essas barras não forem combinadas com estribos, na proporção estabelecida acima, os elementos longitudinais soldados devem obrigatoriamente constituir a totalidade da armadura longitudinal de tração.

Cargas Próximas aos Apoios

- Cargas próximas aos apoios podem influenciar na determinação da armadura de cisalhamento em vigas de concreto armado, conforme ilustrado abaixo:



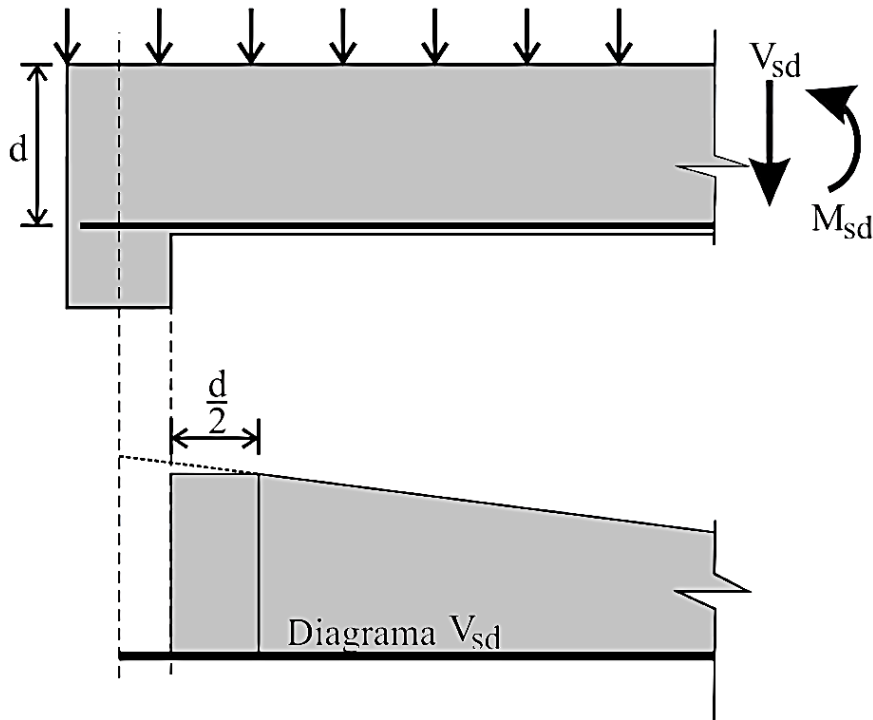
- A parcela da carga distribuída à esquerda do plano α não afeta o nó B (onde calcula-se V_{sw}) pois são transmitidas ao apoio (nó A) via efeito arco;
- Porém, afetam o equilíbrio vertical e influenciam na determinação da força V_{Rd2} relativa à ruína da biela;
- A parcela da carga distribuída compreendida entre os planos α e β interferem no nó B, influenciando na determinação de V_{sw} .

NBR 6118: Cargas Próximas aos Apoios

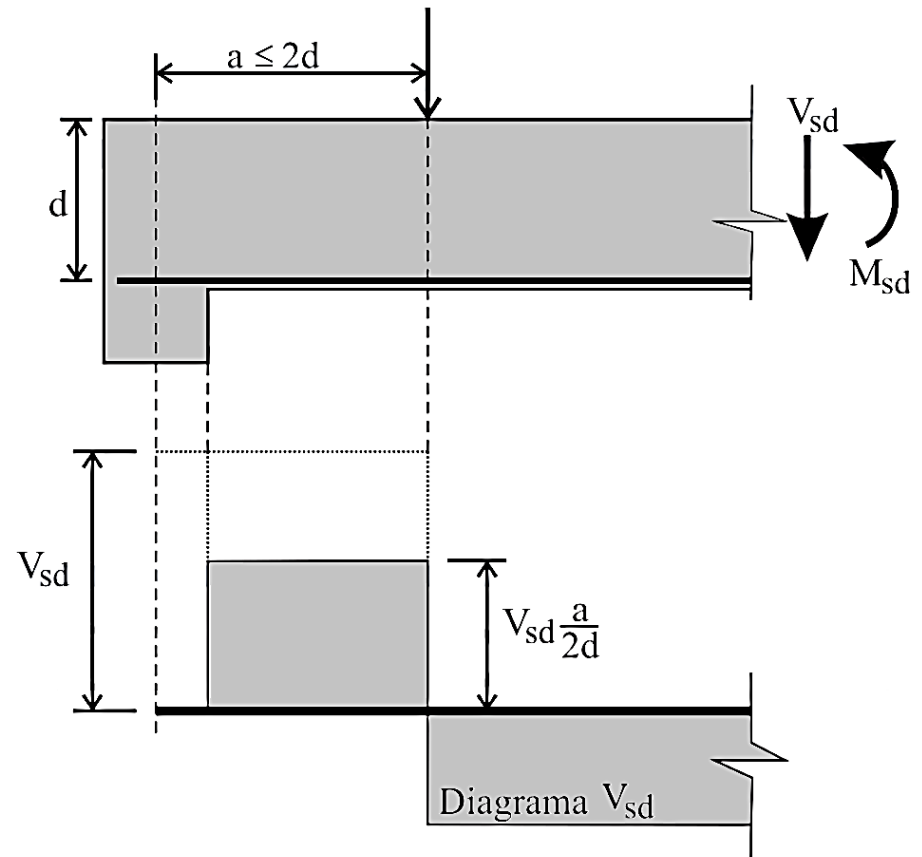
- Para o cálculo da armadura transversal, no caso de apoio direto valem as regras:
 1. no trecho entre o apoio e a seção situada à distância $d/2$ da face de apoio, a força cortante oriunda de carga distribuída pode ser considerada constante e igual à desta seção;
 2. a força cortante devida a uma carga concentrada aplicada a uma distância $a \leq 2d$ do eixo teórico do apoio pode, nesse trecho de comprimento a , ser reduzida, multiplicando-a por $a/(2d)$. Todavia, esta redução não se aplica às forças cortantes provenientes dos cabos inclinados de protensão.
- As reduções indicadas nesta seção não se aplicam à verificação da resistência à compressão diagonal do concreto. No caso de apoios indiretos, essas reduções também não são permitidas.

NBR 6118: Cargas Próximas aos Apoios

- Caso de Cargas Distribuídas

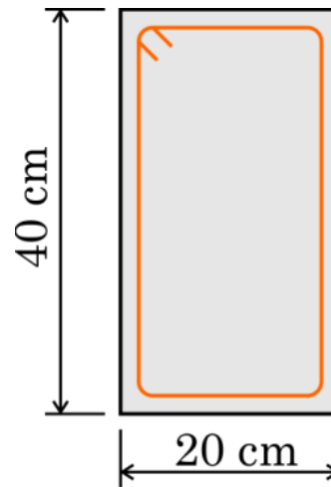


- Caso de Cargas Concentradas

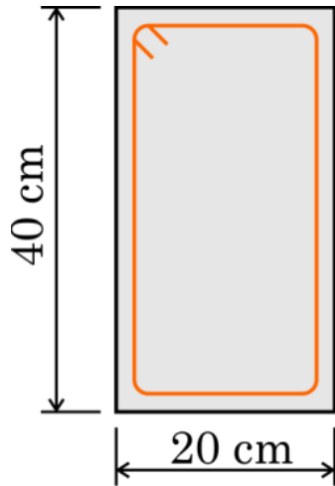


Exemplo 3: Determinar a taxa geométrica mínima para a armadura transversal da viga abaixo, considerando:

- Aço CA-60 e Concreto C25 ($\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);



Exemplo 3:



$$f_{ctm} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} = 0,3 \cdot (25)^{2/3}$$

$$\underline{f_{ctm} = 2,56 \text{ MPa}}$$

$$f_{ywk} = \min \begin{cases} f_{yk} \\ 500 \text{ MPa} \end{cases} = \min \begin{cases} 600 \text{ MPa} \\ 500 \text{ MPa} \end{cases}$$

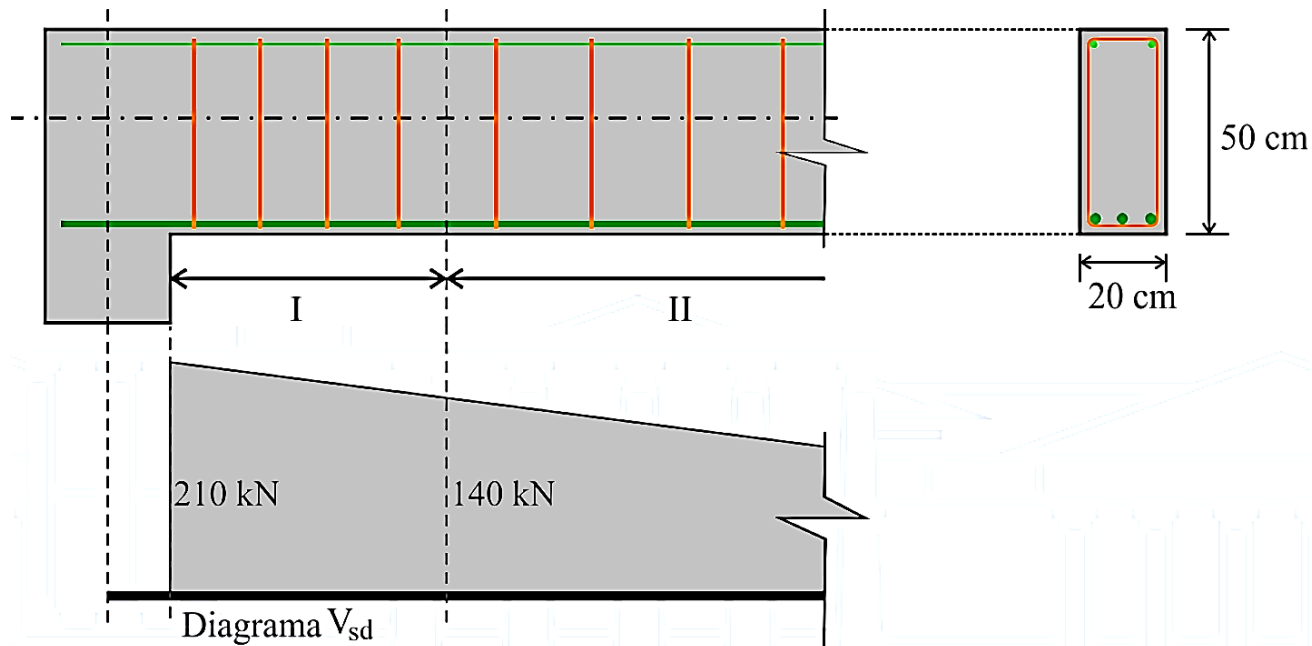
$$\underline{f_{ywk} = 500 \text{ MPa}}$$

$$\rho_{\min} = 0,2 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{ywk}} = 0,2 \cdot \frac{2,56}{500}$$

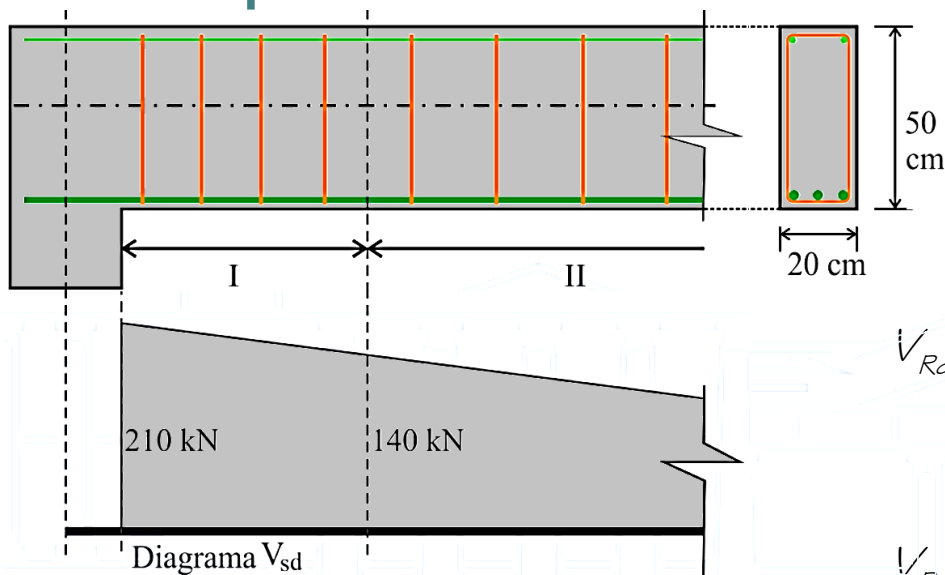
$$\rho_{\min} = 0,10\%$$

Exemplo 4: Determinar o espaçamento dos estribos para o trecho II da viga, considerando :

- Aço CA-60 e Concreto C20 ($\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);
- $d = 0,90 h$ e Vibrador com 40 mm de diâmetro;
- Estribos verticais de dois ramos com barras de 6.3 mm;
- Flexão Simples e Modelo I.



Exemplo 4:



- Verificação do Esmagamento da Biela

$$V_{Rd2,l} = 0,27 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d$$

$$V_{Rd2,l} = 0,27 \cdot \left(1 - \frac{20}{250}\right) \cdot \frac{20}{1,4} \cdot 200 \cdot 0,9 \cdot 500$$

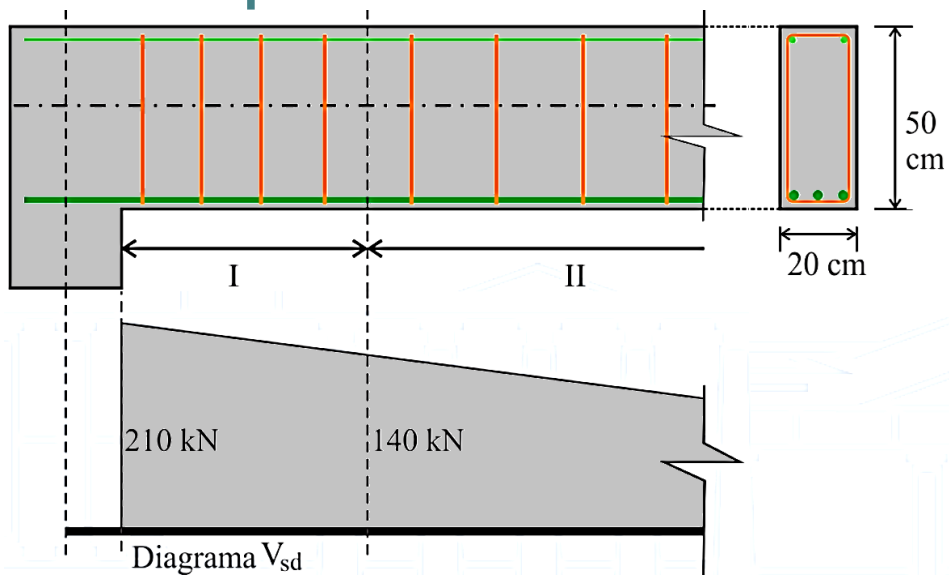
$$V_{Rd2,l} = 319,4 \text{ kN}$$

$$V_{sd} \leq V_{Rd2,l}$$

$$140 \text{ kN} \leq 319,4 \text{ kN}$$

∴ OK!

Exemplo 4:



- Verificação do Diâmetro do Estribo e Definição Taxa Mínima

$$5 \text{ mm} \leq \phi_w \leq \frac{b_w}{10} \quad \therefore \quad 5 \text{ mm} \leq \phi_w \leq \frac{200}{10}$$

$$5 \text{ mm} \leq \phi_w \leq 20 \text{ mm}$$

$$\phi_w = 6,3 \text{ mm} \quad \therefore \quad \text{OK!}$$

$$f_{ywd} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \\ \frac{500}{\gamma_s} \text{ MPa} \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{600}{1,15} \text{ MPa} \\ \frac{500}{1,15} \text{ MPa} \end{array} \right\}$$

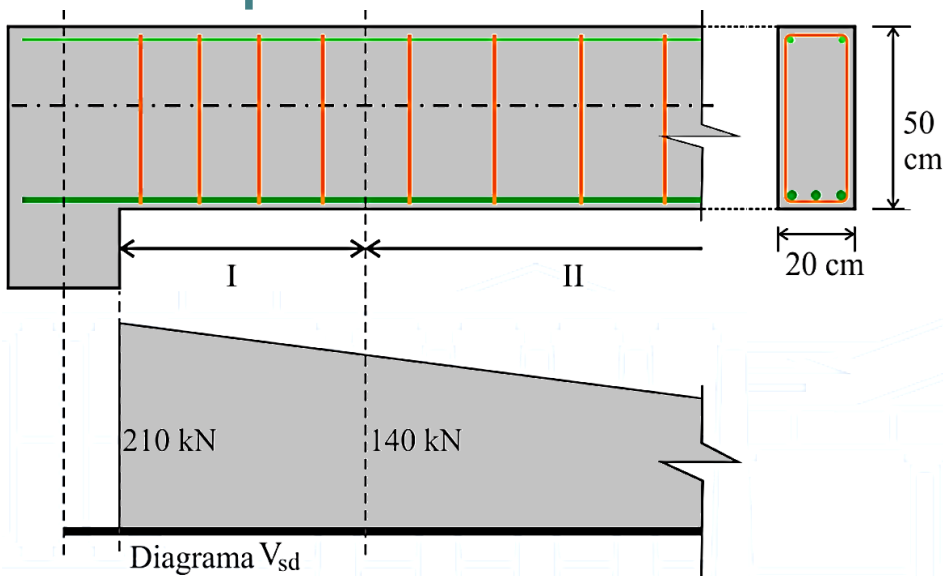
$$f_{ywk} = 435 \text{ MPa}$$

$$\rho_{\min} = 0,2 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{ywk}} = 0,2 \cdot \frac{0,3 \cdot f_{ck}^{2/3}}{\min \{f_{yk}; 500 \text{ MPa}\}}$$

$$\rho_{\min} = 0,2 \cdot \frac{0,3 \cdot (20)^{2/3}}{\min \{600; 500 \text{ MPa}\}}$$

$$\rho_{\min} = 0,09\%$$

Exemplo 4:



• Cálculo do Espaçamento

$$V_{Rd3,l} = V_c + V_{sw} \geq V_{sd}$$

$$V_c = V_{c0} = 0,09 \cdot (f_{ck})^{2/3} \cdot b_w \cdot d$$

$$V_c = V_{c0} = 0,09 \cdot (20)^{2/3} \cdot 200 \cdot 0,9 \cdot 500$$

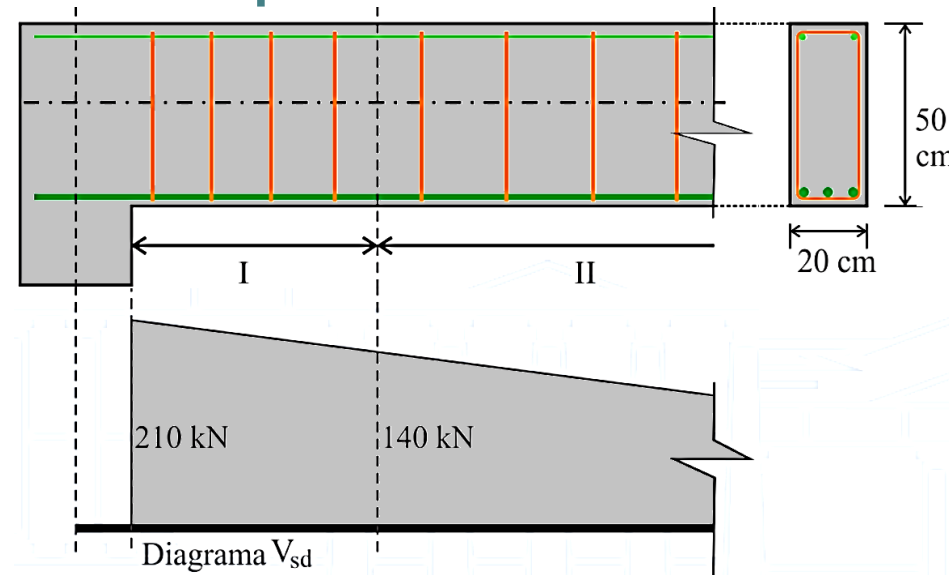
$$V_c = V_{c0} = 59,7 \text{ kN}$$

$$V_{sw} = \left(\frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha) \quad \therefore \quad V_{sd} = V_c + V_{sw} \quad \therefore \quad \underline{V_{sw} = V_{sd} - V_c}$$

$$\left(\frac{A_{sw}}{s} \right) = \frac{V_{sd} - V_c}{0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha)} = \frac{140.000 - 59.700}{0,9 \cdot 0,9 \cdot 500 \cdot 435} = 0,46$$

$$\left[2 \cdot \frac{\pi \cdot (6,3)^2}{4 \cdot s} \right] = 0,46 \quad \therefore \quad s = 136,8 \text{ mm} \quad \Rightarrow \quad \boxed{s = 13 \text{ cm}}$$

Exemplo 4:



- Verificação do Espaçamento

$$- \frac{V_d}{V_{Rd2}} \leq 0,67 \quad \therefore s_{\max} = \min \begin{cases} 0,6 \cdot d \\ 300 \text{ mm} \end{cases}$$

$$- \frac{V_d}{V_{Rd2}} > 0,67 \quad \therefore s_{\max} = \min \begin{cases} 0,3 \cdot d \\ 200 \text{ mm} \end{cases}$$

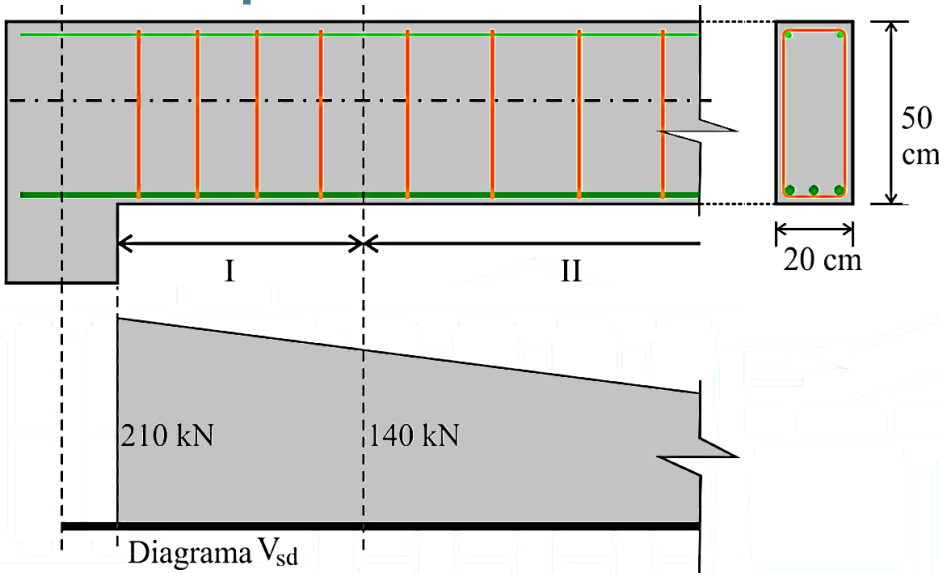
$$\frac{V_{sd}}{V_{Rd2,I}} = \frac{140}{319,4} = 0,44$$

$$s_{\max} = \min \begin{cases} 0,6 \cdot d = 0,6 \cdot 0,9 \cdot 500 = 270 \text{ mm} \\ 300 \text{ mm} \end{cases}$$

$$s_{\min} = \phi_{\text{vibrador}} + 10 \text{ mm} = 50 \text{ mm}$$

$$s_{\min} \leq s \leq s_{\max} \quad \therefore \boxed{50 \text{ mm} \leq 130 \text{ mm} \leq 270 \text{ mm}} \quad \text{Ok!}$$

Exemplo 4:



- Verificação da Taxa de Armadura

$$\rho = \frac{A_{sw}}{b_w \cdot s \cdot \text{sen} \alpha} \geq \rho_{\min}$$

$$\rho = \frac{2 \cdot \pi \cdot (6,3)^2}{4 \cdot 200 \cdot 130} \geq 0,09\%$$

$$\boxed{\rho = 0,24\% \geq 0,09\%} \quad Ok!$$

Exemplo 5: Determinar o espaçamento dos estribos para o trecho II da viga, considerando :

- Aço CA-60 e Concreto C20 ($\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);
- $d = 0,90 h$ e Vibrador com 40 mm de diâmetro;
- Estribos verticais de dois ramos com barras de 6.3 mm;
- Flexão Simples e Modelo I.